

Revue des Elèves des Ecoles Spéciales de l'Université de Louvain

Revue Trimestrielle

RÉDACTION-ADMINISTRATION : 10, rue S^t Michel, LOUVAIN
PUBLICITÉ : Forfait — s'adresser à l'Administration

Compte-chèques postaux : n° 2038.28

SOMMAIRE

Quantité d'un carburant de remplacement pour moteurs d'automobiles ou d'avions	M. GHYSELINCK
Récupération des chaleurs perdues dans les fumées et les valeurs d'échappement.	ED. DESGAINS
Etude sur le gonflement des houilles en cours de distillation.	J. LIGNY
L'hydrodynamique moderne et l'aérodynamique	M. BIOT
Questions diverses	

*← suite de
le numéro 1*

PRIX DE CE NUMÉRO : 5 Frs.

Abonnements d'Etudiants : 15 Frs.

Protecteurs : 30 Frs.

L'hydrodynamique moderne et l'aérodynamique

L'étude de la résistance que subit un solide immergé dans un fluide en mouvement compte parmi les applications les plus ardues de la mécanique rationnelle.

Le problème se présente comme suit : « Étant donné un certain mouvement d'un solide au sein d'un fluide pour lequel on connaissait antérieurement à l'introduction du solide le champ de vitesses : déterminer les forces exercées aux divers points de la surface de séparation du solide et du fluide » (1). C'est donc l'exploration d'un domaine particulier de solution des équations générales de l'Hydrodynamique des fluides parfaits ou visqueux.

L'étude en fut abordée dès 1668, par Huyghens et Mariotte, et reprise plus tard par Newton. Cependant, malgré l'essor considérable de l'Hydrodynamique, sous les auspices des mathématiciens les plus illustres, tels que Bernoulli, Euler, Lagrange et Helmholtz, les applications qui en furent faites à la résistance des fluides étaient, il y a une cinquantaine d'années, quasi absolument inexistantes. Lorsqu'en 1897 Ader prit son envol sur le premier appareil mécanique à moteur, l'aérodynamique n'était pas encore née. La discussion portait sur la question de savoir si la résistance d'un plan était proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence ou à son carré (Loi de Newton). La seule chose sur laquelle on fut d'accord était la proportionnalité de la résistance au carré de la vitesse, suivant les expériences de Dubuat-Duchemin, Joessel, Froude, Renard, Eifel, etc... On peut dire que la croyance à la loi de Newton, aujourd'hui reconnue grossièrement fautive, fut la cause de bien des hésitations chez les premiers inventeurs d'engins de vol ; cette loi donnant pour les incidences faibles des forces portantes beaucoup trop réduites.

(1) LEROUX, *Aéronautique*.

Si l'hydrodynamique fut si longtemps négligée dans ce domaine, c'est sans doute par suite de la grande complexité que le problème présente de prime abord, et même des paradoxes auxquels son application irréfléchie peut donner lieu. Ce n'est qu'à partir du début de ce siècle que l'aérodynamique se constitua en une science véritable s'appuyant sur les lois de la mécanique rationnelle.

Grâce aux efforts d'éminents théoriciens scrutant à la fois les faits et les équations, on put à la lueur des idées nouvelles donner aux recherches une orientation précise. A la fin du siècle dernier, Kirchhoff et Lord Rayleigh, développant les idées de Helmholtz, avaient attiré l'attention sur la présence des surfaces de discontinuité dans l'écoulement des fluides. Les travaux de Lévi-Civita et de Villat, en 1907 et 1911, ceux de Kutta et de Joukowski, tranchèrent définitivement de nombreuses questions. Le théorème de Joukowski, notamment, publié en 1905, peut compter parmi les contributions capitales à la théorie des profils d'ailes. Enfin la théorie de l'aile fermée de Lanchester et de Prandtl, professeur à Göttingen, marqua un pas définitif dans la voie des applications directes de la théorie à la technique. La théorie de Prandtl, en parfait accord avec l'expérience au point de vue aéronautique, a permis de séparer l'influence de la résistance de l'air sur un profil, de celle des pressions dont les effets par unité de longueur dépendent de l'allongement de l'aile.

Avant d'aborder l'exposé sommaire des principaux résultats acquis, il est bon d'attirer l'attention sur quelques principes fondamentaux. Lorsqu'un corps est plongé dans un fluide en mouvement, l'action du fluide est modifiée par le voisinage d'autres corps. C'est ce qu'on a appelé l'interaction. Ainsi la résistance opposée à deux corps identiques et semblablement placés n'est pas égale au double des résistances opposées à chacun d'eux, s'il était seul.

Le principe de relativité de la mécanique classique nous permet, sans changer les forces, de considérer soit un corps immobile et un fluide en mouvement, soit le fluide immobile et le corps en mouvement, à condition que les vitesses relatives du fluide et du corps soient égales dans les deux cas, et que le mouvement du corps soit une translation uniforme.

I. — Les Équations de l'Hydrodynamique.

§ 1 : *Paradoxe de Dalember*

Soit un système de corps qui se meut uniformément et horizontalement dans un fluide parfait indéfini soumis à la pesanteur et en repos à l'infini ; si, en aucun point du fluide, il n'y a des discontinuités de vitesse ni de pression, la résistance opposée par le fluide au mouvement est nulle. Il faut en outre supposer que les vitesses décroissent suffisamment vite avec la distance pour que

$$\iint \rho w (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma$$

étendue à une sphère de rayon infini tendent vers 0, $\alpha \beta \gamma$ étant les cosinus directeurs de la normale à la sphère. Du point de vue analytique, on peut déduire de théories connues l'annulation suffisamment rapide de la vitesse à l'infini pour que cette intégrale double tende vers 0. Tel est dans toute sa généralité l'énoncé du paradoxe de Dalember (1)

En voici une démonstration élémentaire : Rapportons le mouvement à des axes immobiles par rapport au système de corps. Celui-ci est alors immobile et le fluide se meut à l'infini avec une vitesse égale et de sens contraire.

Dans ce cas, on peut trouver à une distance suffisamment grande du corps un ensemble de filets fluides rectilignes constituant un cylindre droit (fig. 1). On peut le limiter par deux sections droites (1) et (2) infiniment éloignées. Appliquons alors le théorème de la quantité de mouvement à la masse fluide ainsi délimitée. Le mouvement étant permanent, la variation de la quantité totale de mouvement projeté sur la direction du mouvement pendant l'intervalle de temps est égale à la différence des quantités de mouvement des parties hachurées (1-3) et (2-4); celles-ci représentant les volumes balayés par les sections droites (1) et (2). Les quantités de mouvement des portions hachurées sont égales et ont pour valeur Spv^2dt puisque la vitesse du fluide v et sa densité ρ sont partout égales à l'infini. Il s'ensuit que la variation de la quantité totale de mouvement en projection sur l'horizontale

(1) Pour la démonstration analytique, voir : VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides.*

est nulle. La somme des projections sur la même direction des forces extérieures est donc nulle aussi. Or celle-ci se compose de l'action du solide sur le fluide, de la pesanteur et des pressions hydrodynamiques sur la surface du cylindre.

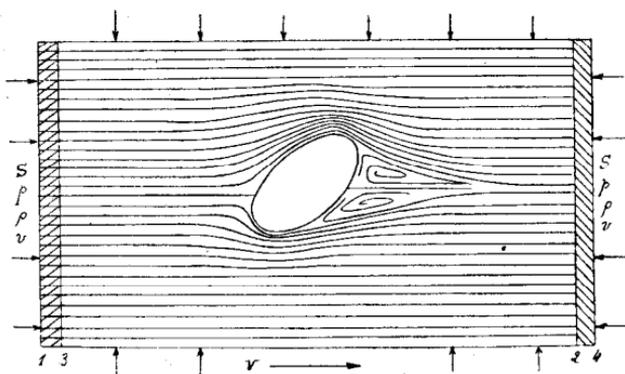


FIG. 1.

La somme des projections de ces deux groupes de forces sur l'horizontale étant nulle, il en découle que le fluide n'exerce sur le corps aucune force horizontale.

Ce paradoxe célèbre de d'Alembert reste inévitable même si l'on introduit dans le fluide des surfaces de discontinuité, tant qu'on n'admet pas que ces surfaces s'étendent jusqu'à l'infini.

C'est précisément le cas dans la réalité physique ; et si l'on ne peut concevoir des surfaces de discontinuité pour la pression, il n'en est pas de même pour les vitesses. Les discontinuités de vitesse se constatent couramment, ne fût-ce que pour l'écoulement d'un jet d'air comprimé dans l'atmosphère.

On peut encore lever le paradoxe en supprimant une autre hypothèse, à savoir l'immobilité du fluide à l'infini, tout en admettant la continuité des vitesses en tout point. La création de tourbillons, par exemple, dans le sillage du mobile rentre dans ce cas. En réalité, ces deux cas sont deux formes différentes de l'hypothèse du mouvement à l'infini.

§ 2 : Équations des Fluides visqueux et incompressibles

Dans la plupart des cas, si l'on excepte l'étude des projectiles, les vitesses envisagées sont telles que l'erreur relative portant sur la pression ne dépasse pas 1 % lorsqu'on considère l'air comme incompressible.

On peut donc se borner à étudier le mouvement d'un fluide incompressible.

En réalité les fluides sont visqueux, ce dont on n'a pas tenu compte jusqu'ici. Remarquons d'abord que, grâce à cette viscosité, la démonstration donnée ci-dessus du paradoxe semble s'appliquer en toute rigueur. En effet, les tourbillons et surfaces de discontinuité doivent nécessairement disparaître à l'infini dans un fluide visqueux, par suite des frottements internes. Toutefois, si l'hypothèse de l'immobilité à l'infini est réalisée, celle de l'égalité des pressions ne l'est plus, par suite de la variation de densité due à l'élévation de température.

Les équations du mouvement des fluides visqueux s'écrivent :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \Delta w - \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \rho = \text{constante} \end{array} \right.$$

où
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

μ = coefficient de viscosité.

En vertu d'une propriété bien connue des champs de vecteurs, si le curl du champ de vitesse est nul en tout point, c'est-à-dire si le mouvement est irrotationnel, ce champ dérive à chaque instant d'un potentiel dont le gradient est égal à la vitesse. De plus, si le fluide est incompressible, l'équation de continuité impose à la fonction V la condition de vérifier l'équation de Laplace (1).

$$(2) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

(1) Les composantes du tourbillon sont :

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

S'il est nul, les équations $p = q = r = 0$ expriment que $u dx + v dy + w dz$

Si le mouvement est permanent, cette fonction est la même à tout instant, et l'étude du mouvement du fluide est ramenée à celle des solutions de $\Delta V = 0$.

Nous allons montrer que le théorème de Lagrange s'étend aux fluides visqueux incompressibles.

On a en effet

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

cette dernière expression étant nulle en vertu de (2) au cas où le mouvement est irrotationnel, il s'ensuit que les équations (1) deviennent alors celles d'un fluide parfait. Si donc, à un instant donné, un fluide visqueux a même mouvement qu'un fluide parfait, leurs mouvements resteront identiques à tout instant suivant, et l'on peut étendre le théorème de Lagrange aux fluides visqueux incompressibles.

Dès lors, si l'on suppose un fluide indéfini parfaitement immobile, et si l'on y introduit un corps n'exerçant aucune action tangentielle sur le fluide, le mouvement du fluide se maintiendra irrotationnel à tout instant, même s'il est visqueux. Il ne peut donc se créer ni tourbillons ni discontinuités de vitesse au bout d'un temps si long soit-il et tel qu'à cet instant le mouvement soit devenu permanent. On retombe ainsi sur le paradoxe de D'Alembert.

Il s'ensuit que l'unique cause de la résistance d'un fluide incompressible ne peut être que l'action tangentielle qu'il exerce sur le corps grâce à sa viscosité. C'est elle qui permet la production de tourbillons et surfaces de discontinuité.

L'expérience a montré que son action est double :

1° Il se produit au voisinage du corps une couche mince où le mouvement est régi par la loi des fluides visqueux.

est différentielle exacte et par conséquent

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} \quad w = \frac{\partial V}{\partial z}$$

En reportant ces valeurs dans l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

2° En tout autre point, le mouvement du fluide est le même que celui d'un fluide parfait, mais il se forme des tourbillons et des surfaces de discontinuité dont la production est due à la couche mince envisagée au 1°.

Ceci nous amène à distinguer deux modes d'action des fluides : une résistance due à l'action tangentielle du fluide, et l'autre due aux pressions normales dont la résultante n'est différente de zéro que s'il y a des discontinuités de vitesse ou des tourbillons. On verra plus loin combien cette notion est féconde dans l'étude expérimentale des ailes d'avion.

Puisque l'état tourbillonnaire ou irrotationnel du fluide a une si grande influence sur le type de mouvement qui s'établit, on conçoit que des divergences considérables puissent se produire dans les résultats expérimentaux si des précautions spéciales ne sont pas prises afin d'éviter la turbulence du fluide dans les tunnels aérodynamiques. Des écarts allant jusque 30 % furent constatés de ce fait lorsque la résistance était mesurée pour un corps immobile dans un fluide en mouvement ou pour un déplacement dans un fluide immobile, écarts dus à l'état tourbillonnaire préexistant pour le fluide en mouvement.

Ce fait connu sous le nom de paradoxe de Dubuat fit même mettre en doute, par certains auteurs, le principe de relativité!

De la forme même des équations (1), on peut tirer certaines conclusions intéressantes.

Pour des vitesses élevées les termes de la forme $u \frac{\partial u}{\partial x}$ augmentent plus vite que ceux de la forme Δu . L'influence de la viscosité tend à devenir nulle aux grandes vitesses et le fluide se comporte comme un fluide parfait. Inversement pour les vitesses faibles les termes de viscosité sont prédominants. L'influence de la viscosité diminue également lorsqu'on augmente les dimensions des corps plongés dans le fluide ; le terme Δu étant alors petit en face de $u \frac{\partial u}{\partial x}$.

On voit d'autre part que la viscosité μ n'intervient que par le rapport $\frac{\mu}{\rho}$. D'où il suit que si l'on augmente ou diminue la pression d'un gaz, on diminue ou augmente l'influence de la viscosité. Celle-ci, en effet, comme le montre la théorie cinétique des gaz, est indépendante de la pression. On s'ex-

plique l'échec des tentatives de réalisation des pompes centrifuges à gaz raréfié.

Le coefficient $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ porte le nom de coefficient cinématique de viscosité. Remarquons enfin que si l'on augmente la pression d'un gaz parfait en maintenant constante la température, les forces exercées par le fluide peuvent changer, mais les vitesses se maintiennent constantes, puisque la pression n'intervient que par le rapport $\frac{p}{\rho}$ dans les termes $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$.

§ 3 : *L'équation de Laplace*

Il y a lieu d'attirer l'attention également sur ce que le mouvement permanent irrotationnel n'est nullement déterminé pour une configuration donnée des corps placés dans un fluide, dans des conditions de vitesse bien déterminées pour celui-ci avant l'introduction du corps. Les conditions aux limites sont en effet la vitesse et la pression à l'infini et, de plus que la vitesse normale soit nulle sur toute surface délimitant le fluide. (Problème de Neumann). Il se peut fort bien qu'en un point de ces surfaces la vitesse du fluide soit nulle également. Dès lors la fonction V n'est plus régulière sur la surface et les conditions aux limites sont insuffisantes pour la déterminer.

Le problème de la détermination des lignes de force autour d'un conducteur placé dans un champ électrostatique primitivement uniforme, ne diffère du précédent que par la manière de se donner les conditions aux limites, les lignes de courant étant simplement remplacées par les lignes de force. Toutefois, dans ce dernier cas, aucun doute n'est possible concernant la solution à choisir.

Ainsi par exemple, pour le cas d'un fluide, il peut s'établir autour d'un cylindre circulaire se mouvant dans un fluide immobile notamment deux types de mouvement irrotationnel, selon que le cylindre tourne ou non autour de son axe. Dans le premier cas, il subit une poussée transversale considérable (phénomène de Magnus).

Bien plus, si l'on admet la présence dans le fluide de surfaces de discontinuité (ce qui n'est pas le cas pour un potentiel électrique), il existe alors une nouvelle famille d'une infinité

de solutions admissibles. L'expérience seule permettra de déterminer le type de mouvement qui s'établit dans des conditions données.

Un prochain article traitera de la manière dont pratiquement on est arrivé à mettre les phénomènes en équation.

MAURICE BIOT,
IV-mines.

(A suivre).

L'hydrodynamique moderne et l'aérodynamique

(Suite)

par MAURICE BIOT (IV-mines)

§ 4 : Équation de Bernoulli.

On a vu dans un précédent article comment l'équation de Laplace permettait de calculer les vitesses. Rappelons comment on peut en déduire les pressions.

On sait que si un fluide parfait est soumis à un champ de forces qui dérive d'une fonction de force U , on a :

$$\frac{1}{2} V^2 = U - \frac{p}{\rho} + \text{const.},$$

la constante restant la même pour un même filet fluide. De plus, si le mouvement est irrotationnel, cette constante est la même pour l'ensemble du fluide. On peut, en effet, vérifier facilement que les équations du mouvement d'un fluide parfait incompressible s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 2(qw - rv) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 2(rv - pw) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} \right) = 2(pv - qu) \end{array} \right.$$

Si le tourbillon (p, q, r) est nul, il vient :

$$U - \frac{p}{\rho} - \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

avec, cette fois-ci, même valeur de cette constante pour tous les filets.

Si on néglige la pesanteur, $\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$

II. — La Loi de Similitude.

Les principes de la similitude mécanique découverts par Newton sont exposés dans de nombreux traités. Rappelons toutefois qu'ils ont pour but de donner les conditions auxquelles doivent satisfaire deux systèmes matériels en mouvement pour que les mesures faites au moyen d'un certain système d'unités dans l'un soient égales à celles faites dans l'autre moyennant un changement éventuel des trois unités fondamentales. On conçoit l'intérêt de cette question pour l'expérimentation sur les maquettes d'avions ou de navires.

Contentons-nous d'en exposer une application très particulière. Soit un ensemble de maquettes semblables d'avions de dimensions différentes. Appelons D le paramètre de similitude (distance de deux points homologues); V , la vitesse du courant d'air, ρ la densité de l'air et ν le coefficient de viscosité cinématique.

La force qui s'exerce sur le solide a pour expression :

$$F = \rho V^2 D^2 \varphi (VD\nu\rho).$$

En effet F ne dépend que de V , D , ν , ρ . Il suffit d'examiner les équations du mouvement pour s'en rendre compte. Pour un gaz, la pression n'intervient pas dans le mouvement, comme on a vu dans un précédent article. De plus, on suppose que la pesanteur g est constante pour toutes les expériences. On peut donc toujours écrire l'équation ci-dessus. Or la fonction φ doit être sans dimension, puisque $\rho V^2 D^2$ a la dimension d'une force; le paramètre ν ayant pour dimension $L^2 T^{-1}$, on voit que la masse M n'intervient dans φ que par ρ . Et dès lors la fonction φ doit être indépendante de ce paramètre.

La seule combinaison de dimension nulle de V , D , ν est $\frac{VD}{\nu}$, et il vient finalement :

$$F = \rho V^2 D^2 \varphi \left(\frac{VD}{\nu} \right).$$

$\frac{VD}{\nu}$ s'appelle nombre de Reynolds et joue un rôle important, comme nous le verrons, dans l'expérimentation.

On voit immédiatement que le fait d'avoir déterminé F expérimentalement pour un certain système de valeurs,

permet de déduire F pour toute la famille de ces valeurs, qui laisse $\frac{VD}{v}$ constant.

III. — Le point de vue expérimental.

Avant d'entrer dans plus de détails, il est bon de ne pas perdre contact avec l'expérience. Les considérations de similitude et le nombre de Reynolds ont grandement contribué à éclairer les idées des expérimentateurs et aidé à l'application d'une théorie parfaite par elle-même, mais qui, par suite de la grande complexité des équations, donnait lieu à une mauvaise interprétation. Bien que nous n'ayons établi la loi de similitude que pour la force F , elle s'étend à l'écoulement du fluide tout entier. Remarquons toutefois que la constance du nombre de Reynolds n'implique la similitude du mode d'écoulement que si les vitesses ne font pas intervenir la compressibilité.

Si l'on plonge un cylindre dans un fluide animé d'une vitesse uniforme perpendiculaire à ses génératrices, on constate que si le nombre de Reynolds varie, il se produit différents types d'écoulement nettement différents. Si D représente le diamètre du cylindre, pour une valeur $\frac{VD}{v} = 0,5$ (C, G, S), l'écoulement se produit suivant la fig. 1; c'est le cas pour une $V = 2$ cm./sec. et $D = 1$ cm., dans de l'huile de viscosité cinématique $v = 4$ cm²/sec. Pour une valeur de $R = 100$, on constate que l'écoulement est conforme à la figure 2, ce qui correspond à un cylindre ayant les dimensions précédentes, mais avec une vitesse de l'huile égale à 400 cm./sec. ou encore d'un fil plongé dans l'air avec $D = 0,1$ cm. et $V = 140$ cm./sec.

Pour des valeurs plus élevées de R il se produit d'abord un écoulement non permanent, une suite alternée de tourbillons prenant naissance derrière le cylindre et se déplaça dans le sens du fluide avec une vitesse légèrement inférieure. Le cylindre subit des poussées latérales, alternatives (fig. 3). Ce phénomène se produit entre deux valeurs critiques bien déterminées du nombre de Reynolds (200 à 3.000) et engendre dans le fluide des zones de pression et de dépression dont le passage devant l'oreille donne un son. On croit devoir attribuer

à cette cause le phénomène de bruissement des fils télégraphiques sous le vent. Le calcul a d'ailleurs permis de déterminer l'intensité, la distance des tourbillons et la vitesse de translation nécessaire à leur stabilité.

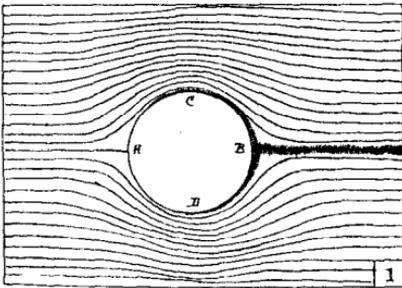


FIG. 1.

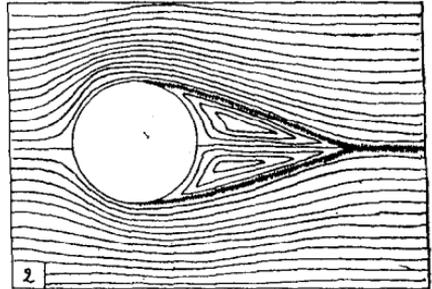


FIG. 2.

Pour des valeurs de R supérieures à 3.000 les filets fluides décollent du cylindre et il se crée une zone de dépression où la pression est sensiblement uniforme entre les surfaces de discontinuité E et F (fig. 4) (1).

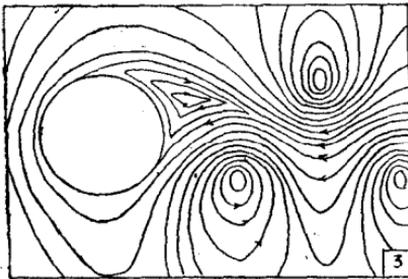


FIG. 3.

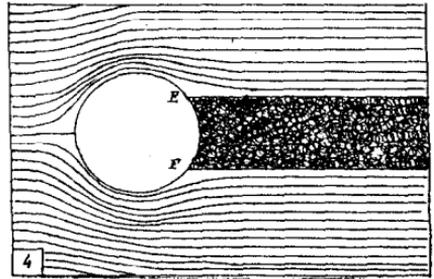


FIG. 4.

Si l'on augmente la vitesse de façon à faire intervenir la compressibilité, la loi de similitude que nous avons donnée pour R constant n'est plus valable. Lorsque, comme pour une balle de fusil, la vitesse est de l'ordre de celle du son dans le

(1) Des phénomènes identiques se produisent dans l'écoulement à travers une conduite. Il existe une valeur critique de $R = 2.000$ pour laquelle le fluide passe du régime de Poiseuille au régime turbulent.

fluide, il se forme un cône de pression ayant pour sommet la pointe d'attaque de la balle et donnant lieu à une résistance nouvelle à l'avancement due à une perte d'énergie par radiation sous forme d'onde. C'est pour cette raison qu'il ne faut pas dépasser pour les vitesses périphériques des hélices la valeur de 300 m./sec (fig. 5).

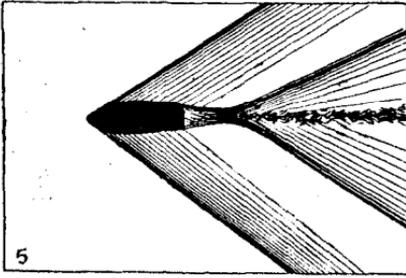


FIG. 5.

Toutes ces figures donnent le mouvement rapporté au corps, excepté pour la fig. 3 où le mouvement est rapporté aux centres des tourbillons.

Examinons plus en détail le cas de la fig. 1. Le mouvement est partout irrotationnel, excepté au voisinage du corps dans la « couche limite » constituée d'une zone très

mince de fluide en régime turbulent, et qui se prolonge derrière le cylindre. C'est la quantité de mouvement communiquée au fluide dans cette couche qui est seule cause de la résistance à l'avancement. Ou, si l'on préfère, la résultante des pressions hydrodynamiques étant nulle, en vertu du paradoxe de D'Alembert, la résistance est due au seul frottement du fluide sur le corps. C'est le mode d'écoulement donnant le minimum de résistance.

Si l'on trace la courbe des pressions et dépressions portée

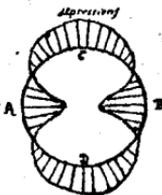


FIG. 6.

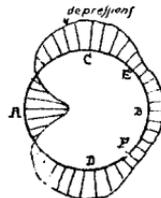


FIG. 7.

sur des normales au cylindre, on constate qu'il y a surpression égale sur la face avant et arrière A et B, et dépression aux points latéraux C et D (fig. 6).

On s'en rend facilement compte par l'équation de Bernoulli.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const.} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

p_o et v_o étant la pression et la vitesse à l'infini. On voit que si $v > v_o$, comme c'est le cas en C et D, on a $p < p_o$ en ces points et il y a dépression. On raisonnera de même pour A et B.

Remarquons que la vitesse est le plus grande là où la section des filets fluides est le plus faible, c'est-à-dire en C et D.

Dans le cas de la figure 4, la courbe des pressions est donnée par la figure 7. Elle est sensiblement la même que dans le



FIG. 8.



FIG. 9.

premier cas, jusqu'aux points de décollement, à partir desquels elle reste constante. On voit qu'à partir de E et F il existe des dépressions sur la face avant, contrairement à ce qu'on pourrait croire si l'on partait de la notion fautive de choc de veines fluides sur le corps. En tous points situés en dehors de la zone à pression constante, le mouvement est irrotationnel et diffère peu de celui donné à la figure 1.

Si l'on veut maintenir le type d'écoulement à faible résistance, comme au 1^o, pour des vitesses pratiques, il est nécessaire de donner au corps un profil fuselé de façon à ne permettre le décollement que pour les valeurs élevées du nombre

de Reynolds. On aura ainsi un mouvement irrotationnel avec couche limite et où la résultante des pressions hydrodynamiques est nulle, le frottement entre seul en jeu (fig. 8). Bien qu'il soit relativement faible, il devient



FIG. 10.

cependant considérable dans le cas de corps de grandes dimensions tels que les dirigeables.

Pour les corps dissymétriques, tels qu'une aile, il se produit une force portante verticale, avec résistance minime pour des angles d'incidences faibles (fig. 9), mais si ceux-ci augmentent il y a décollement et la résistance s'accroît notablement (fig. 10). Outre le frottement, il y a une troisième cause de résistance dont l'influence relative est surtout sensible aux

faibles incidences, mise en relief par la théorie et due aux extrémités des ailes. Cette découverte constitue une preuve éclatante de l'insuffisance des méthodes empiriques même les plus perfectionnées lorsqu'elles ne sont pas systématisées par une théorie.

IV. — Application des équations de l'hydrodynamique.

Le problème le plus simple qui se pose et dont la solution a été donnée par la théorie de Rankine, connue de longue date, est celui du calcul des résistances lorsque le mouvement est partout irrotationnel. Seul le frottement intervient. Ce problème n'a d'intérêt que pour les dirigeables. Il faudra intégrer l'équation de Laplace en observant les conditions aux limites, en déduire les vitesses sur la surface et faire la somme des

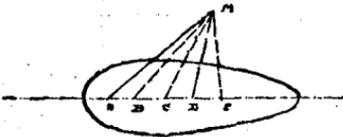


FIG. 11.

frottements élémentaires en se donnant une loi du frottement du fluide contre la paroi facile à déduire de l'expérience.

Ces potentiels sont relativement faciles à trouver. Ainsi on verrait que sa valeur en un point M quelconque (fig. 11),

$$V = U_0 x + \sum \frac{n}{r} \quad \text{avec} \quad \sum n = 0,$$

correspond à une forme de carène indiquée à la figure 11. U_0 étant la vitesse du fluide à l'infini, ce potentiel est de révolution autour de l'axe des x . Les r sont les distances de M aux différents pôles A, B, C.

On simplifie grandement l'étude des potentiels de vitesse en considérant un mouvement plan (potentiel indépendant de z , par exemple), et en considérant alors le mouvement du fluide autour d'un cylindre infiniment long. La théorie des fonctions analytiques de variables complexes ou de la représentation conforme, procure, comme on va le voir, une méthode de recherche très élégante, et qui trouve son utilité dans l'étude des profils cylindriques à force portante dont nous allons nous occuper plus particulièrement.

§ 1 : Représentation conforme.

Dans le cas du mouvement plan, l'équation de Laplace devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Posons : $z = x + yi$
 $Z = X + Yi.$

On sait que si Z est une fonction analytique de z , la fonction $X(x, y)$ vérifie l'équation de Laplace. De plus, les courbes des deux familles $X = \text{const.}$; $Y = \text{const.}$ sont orthogonales. Puisque la première représente les courbes équipotentielles, la seconde représentera les lignes de courant. Le problème se réduit donc ici à rechercher une fonction analytique dont la partie imaginaire reste constante sur un certain contour, constituée par la directrice du cylindre étudié. La partie réelle de Z est alors le potentiel cherché. On a donc, pour les composantes de la vitesse,

$$u = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

En vertu d'une propriété fondamentale des fonctions analytiques, on a aussi :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Yi}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Yi}{\partial y} = u - iv.$$

L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dZ}{dz} \right|^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Ces équations permettent de déduire immédiatement la vitesse et la pression en tout point du fluide.

Etudions par exemple le potentiel du courant de la figure 1 autour d'un cylindre circulaire indéfini de rayon a . Prenons son centre comme origine et l'axe des rayons se dirige suivant la vitesse (fig. 12). La fonction suivante

$$Z = u_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

satisfait au problème, car en posant $z = re^{i\theta}$ il vient pour $r = a$:

$$Z = u_0 a (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2u_0 a \cos \theta,$$

dont la partie imaginaire est nulle. On voit d'autre part immédiatement, en dérivant que la vitesse vaut u_0 partout à l'infini,

$$\frac{dZ}{dz} = u_0 \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right) = u_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta\right) + i u_0 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta = u - iv$$

$$\text{d'où} \quad u = u_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta\right)$$

$$v = -u_0 \frac{a^2}{r^2} \sin 2\theta.$$

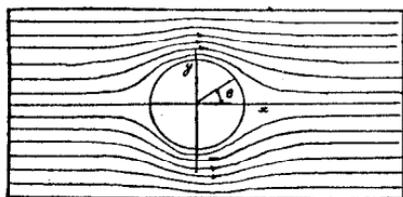


FIG. 12.

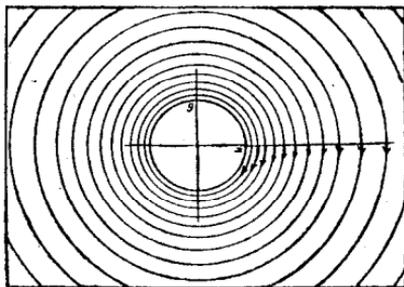


FIG. 13.

L'équation de Bernoulli devient le long du contour ($r = a$) :

$$\frac{p - p_0}{\rho} = u_0^2 \left(\cos 2\theta - \frac{1}{2} \right)$$

p_0 = pression à l'infini.

La dépression est nulle au point $\theta = 30^\circ$ et elle est maximum pour $\theta = 90^\circ$.

Les lignes de courants se trouvent en égalant à une constante la partie imaginaire de Z . On verrait facilement que ce sont des cubiques d'équation

$$y(x^2 + y^2 - a^2) = C(x^2 + y^2)$$

$$\text{ou} \quad \sin \theta = \frac{Cr}{r^2 - a^2}$$

Un autre potentiel intéressant est celui du tourbillon unique autour d'un cylindre circulaire ($A = \text{constante}$).

$$Z = iA \text{ Log } z. \quad (\text{Fig. 13}).$$

En développant, il vient :

$$Z = iA \operatorname{Log} r - (2k\pi + \theta)$$

les lignes de courants sont des cercles $r = \text{cons.}$

La vitesse

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{iA}{z} = \frac{iA}{r} e^{-i\theta}$$

elle a pour grandeur absolue $\left| \frac{dZ}{dz} \right| = \frac{A}{r}$.

Le mouvement est irrotationnel dans tout domaine ne comprenant pas l'origine. C'est sensiblement pareil mouvement tourbillonnaire qui s'établit dans l'atmosphère en donnant lieu au cyclone et aux trombes. L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{A^2}{r^2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

On voit que la pression diminue rapidement quand on se rapproche du centre, ce qui explique le phénomène de succion du noyau de la trombe ainsi que les dépressions barométriques des cyclones.

Ces deux potentiels jouent un rôle fondamental dans la théorie des ailes de Joukowski, dont nous parlerons plus loin.

Remarquons que, étant donné un potentiel arbitraire autour du cercle, on peut transformer ce cercle par un changement de variable en un profil quelconque, les nouvelles fonctions potentiels des répondront encore aux conditions aux limites sur le profil, puisque cette transformation conserve les angles et que par suite les vitesses resteront tangentes au profil.

Soit $z = z(\zeta)$:

lorsque z parcourt le cercle, ζ décrit le profil transformé. Remplaçant z par $z(\zeta)$ dans Z , on obtient le potentiel des vitesses correspondant

$$Z = Z[z(\zeta)]$$

d'où l'expression de la vitesse :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{dZ}{dz} \frac{dz}{d\zeta}$$

Il faut, de plus, que la vitesse reste la même à l'infini.

Donc :

$$u_o = u_o \left[\frac{dz}{dz} \right]_{\infty}$$

La valeur de $\frac{dz}{dz}$ à l'infini doit être égale à l'unité.

On voit de suite que les fonctions de transformation admissibles sont de la forme

$$z = z + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

Si en un point du profil $\frac{dz}{dz} = 0$, celui-ci présente une pointe en cet endroit. Tel est le cas du profil de Joukowski dont voici l'équation :

$$z = \frac{(z + a)^2}{z + kae^{i\mu}}$$

Lorsque z parcourt le cercle, z' décrit un profil d'aile dont la forme dépend des trois paramètres a , k , μ , et dont la pointe est située à l'origine.

Remarquons aussi que pour faire tourner un profil quelconque d'un angle α autour de l'origine, il suffit de changer la fonction de transformation en

$$ze^{-i\alpha} = z [ze^{-i\alpha}].$$

On a ainsi un moyen simple d'étudier l'effet des variations d'incidence.

Enfin, pour déterminer les forces qui agissent sur le profil, on dispose des équations de Blasius

$$F_y - iF_x = -\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dZ}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dz}$$

On intègre entre les points du profil délimitant la région où l'on veut déterminer la résultante. Le moment, par rapport à l'origine, a pour valeur la partie réelle de

$$M + iN = -\frac{\rho}{2} \int \left(\frac{dZ}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dz} Z dz$$

prise sur un cercle entourant le profil.

On se rend facilement compte que si l'on fait tourner le profil transformé, les points A et B correspondant à ceux du cercle et où la vitesse est nulle, se déplacent sur ce profil.

La figure 15 représente un pareil profil, avec, comme potentiel transformé, celui de la figure 14, lui-même obtenu en faisant la somme des potentiels correspondant aux figures 12 et 13.

§ 2 : Force portante

A) AILE INFINIE

Théorie de Joukowski. — Le problème de l'aile infinie, plus

simple que celui de l'aile finie, en diffère par le fait que ce dernier cas comporte des phénomènes de résistances dues aux extrémités et qui n'existent pas dans le premier.

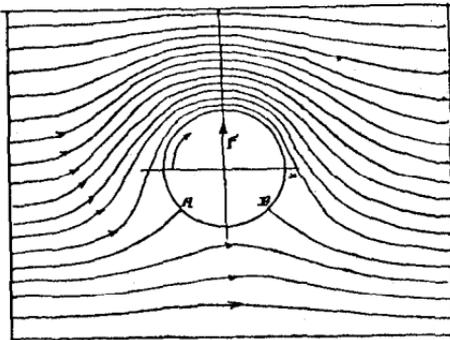


FIG. 14.

Rappelons que la circulation des vitesses le long d'un contour C s'exprime par l'intégrale de ligne

$$\int_C u dx + v dy + w dz = \Gamma$$

Dans tout domaine simplement connexe (c'est-à-dire tel que toute ligne formée puisse être réduite à un point par une transformation continue sans sortir du domaine), et où il existe un potentiel des vitesses, Γ est nul pour tout contour fermé (1). Si le domaine est à connexions multiples, comme c'est le cas pour un anneau ou un cylindre indéfini, et s'il existe un potentiel en dehors de l'anneau ou du cylindre, celui-ci est dit polytrophe.

Dans ce cas, la circulation le long d'une courbe fermée non réductible à un point est différente de 0 et indépendante du contour (fig. 16).

(1) Il suffit de se rappeler le théorème de Stokes. Mentionné plus loin. La circulation est égale au flux du curl à travers toute surface s'appuyant sur le contour. S'il y a un potentiel le curl est nul.

Soit en effet les deux contours (1231 — 4564) entourant l'anneau. Si je considère la circulation le long du parcours (1231 — 4561), on a

$$\Gamma_{1231} + \Gamma_{14} + \Gamma_{4564} + \Gamma_{41} = 0,$$

or $\Gamma_{14} + \Gamma_{41} = 0,$

donc $\Gamma_{1231} = \Gamma_{4564}.$

Voici maintenant l'énoncé du théorème célèbre de Joukowski (1) : « Lorsqu'un courant, dont la vitesse à l'infini

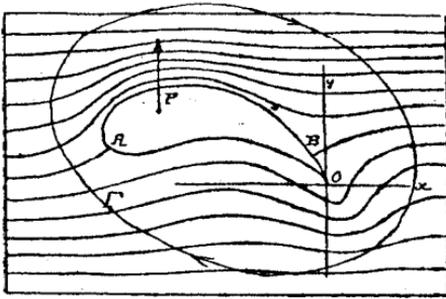


FIG. 15.



FIG. 16.

est V_o , s'écoule le long d'un contour et que la circulation le long de ce contour est égale à Γ , la résultante des pressions du fluide sur le contour est égale au produit du vecteur représentant la vitesse du courant à l'infini par la circulation et la densité du fluide ($F = \Gamma \rho V_o$). La direction de la force s'obtient en faisant tourner de 90° le vecteur V_o dans le sens inverse de celui de la circulation ».

La théorie de Joukowski est basée sur la considération d'un potentiel autour d'un cylindre circulaire obtenue par superposition des deux potentiels étudiés plus haut (fig. 12 et 13). On obtient ainsi le champ de vitesse de la figure 14.

Le potentiel complexe a pour expression :

$$Z = u \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + iA \text{Log } z$$

(1) JOUKOWSKI, *Acrodynamique*. — La force F est prise par unité de longueur du profil supposé indéfini.

La vitesse beaucoup plus grande du coté des y positif y crée une dépression, tandis qu'une surpression se produit du coté des y négatifs et le cylindre subit une poussée vers le haut. Le théorème de Joukowski mène directement à cette conclusion.

Ce type de potentiel s'établit lorsqu'un cylindre circulaire tourne autour du corps en tourbillon par suite d'un entraînement dû à la viscosité, tourbillon qui se superpose au champ, de translation pour donner une poussée transversale considérable. C'est le *Phénomène de Magnus*.

Appliquons le théorème de Joukowski au calcul de la poussée. Supposons un cylindre de 0,30 m. de diamètre tournant à 3.000 t./min. dans un courant de 100 km./h. Admettons que l'air soit entraînée au contact du cylindre à la même vitesse que lui et que le champ est irrotationnel à une faible distance du corps.

$$\Gamma = \frac{2\pi \overline{0,30} \times 3000}{60} \times 2\pi \times \overline{0,30} = 88,5 \text{ m}^2/\text{sec.}$$

$$F = \rho \Gamma V_o = \frac{1,29}{g} \times 88,5 \times 27,8 = 323 \text{ kg.}$$

Ce cylindre subit donc la poussée énorme de 323 kgs. par mètre courant. Dans la réalité, le phénomène aux grandes vitesses est plus complexe par suite du décollement et du glissement de la zone à potentiel (1).

La théorie de l'aile portante est basée sur la considération du type précédent de potentiel. On a pu voir dans un paragraphe ci-dessus qu'une aile incurvée possédant une pointe au bord de fuite donnait lieu à deux modes d'écoulement distincts. Il se produit en faibles incidences un écoulement sans décollement. Partant de ce fait, Joukowski a déterminé la circulation qui doit s'établir autour de l'aile en fonction de sa forme et de son incidence, et par conséquent aussi la valeur de la force portante. Les points critiques A et B où la vitesse est nulle, varient en même temps sur le cercle avec l'intensité du tourbillon. Ces mêmes points varient en même temps sur le profil transformé. Or si le point B n'est pas confondu avec la pointe et s'il n'y a pas de décollement, la

(1) L'expérience a montré que la circulation Γ réelle est moitié moindre et par conséquent la force F doit être réduite de moitié.

vitesse en O est infinie (1). Ce qui est physiquement impossible. Si donc nous supposons qu'on ait affaire à une incidence suffisamment faible ($< 10^\circ$), pour que l'expérience ait montré l'absence de décollement, il faut que B soit confondu avec O. La circulation Γ qui doit se créer pour une certaine incidence et de façon que cette condition soit réalisée, donne la valeur de la force portante correspondante à cet incidence (2).

Les formules déduites de cette théorie devenue classique s'accordent assez bien avec l'expérience. Voici comment on peut expliquer la naissance du tourbillon. Pendant la période de démarrage, il se produit au début l'écoulement correspondant aux figures 12 et 15 du cercle et du profil transformé. La vitesse tendant à devenir infinie en O, il s'y produit un tourbillon dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (direct). Or en vertu du théorème de Lagrange, la circulation étant nulle à une distance suffisamment grande, il doit se créer autour de l'aile une seconde circulation rétrograde, annulant l'effet de la première, et dont l'intensité croît jusqu'au moment où B se confond avec O. Le premier tourbillon a disparu par suite du frottement lorsque l'état de régime est atteint.

Notons que pendant le déplacement de B, le point A se déplace également, et par conséquent l'existence d'une seconde pointe en avant du profil exige pour que l'écoulement se fasse sans décollement, que les points A et B soient confondus avec les deux pointes du profil. C'est donc une erreur technique que de donner au profil d'aube de turbines une arête d'attaque et de fuite, du moins au point de vue de la théorie de Joukowski et sans tenir compte de l'interaction des aubes.

La force portante F est la seule force exercée sur le profil. Sa ligne d'action se déduit de l'équation de Blasius donnant les moments. A mesure que l'incidence diminue, cette ligne d'action se rapproche de plus en plus du bord de l'attaque, ce qui est conforme à l'expérience.

En réalité, il existe une force horizontale due au frottement du fluide sur l'aile, mais elle n'est que de l'ordre de 0,75 %

(1) Car $u - iv = \frac{dZ}{dz} \frac{dz}{dZ}$ or $\frac{dz}{dZ} = \infty$ à la pointe et $\frac{dZ}{dz}$ est finie.

(2) Remarquons que la circulation autour du cercle est la même que pour le profil transformé.

à 1 % de F. On pourrait la calculer comme il a été indiqué pour les dirigeables.

Théorie de Witoszynski. — La théorie précédente, bien que d'une incontestable valeur n'est cependant pas à l'abri d'objections assez sérieuses. On lui a reproché d'être en contradiction avec la mécanique ! Le tourbillon unique autour de l'aile implique en effet une énergie infinie emmagasinée dans le fluide. Cette objection fréquente ne tient pas, car la théorie de Joukowski considère un mouvement permanent, c'est-à-dire durant depuis un temps infini. Il en est malheureusement une plus grave. Tous les profils dont la pointe correspond au même point sur le cercle devraient présenter la même circulation et la même force portante, quelque soient leurs formes. Or ceci est contredit par l'expérience. La moindre bosse ou dépression du profil change souvent ses caractéristiques dans de proportions nullement négligeables. D'après une récente théorie de Witoszynski, il se formerait à partir du bord de fuite une nappe de discontinuité de vitesses. Le potentiel correspondant pour le cercle est le même que précédemment, mais augmenté d'un terme de discontinuité dont la dérivée est

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{iK}{Z \left(Z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} + Z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} + 2\epsilon\alpha^{\frac{1}{2}} \right)}$$

Transportant ces valeurs dans les équations de Blasius, on trouve les forces exercées sur le profil. Les résultats sont en bon accord avec l'expérience. On retrouve notamment la formule d'Eiffel pour le plan

$$P_v = \frac{\alpha}{4} u^2 l.$$

Les équations de Blasius permettent d'étudier facilement les déplacements de la résultante avec l'incidence et la forme du profil et de déduire par exemple la forme du profil réalisant sur un avion donné des conditions de stabilité déterminée. C'est ainsi qu'on a pu réaliser des ailes où la résultante a un point d'application indépendant de l'incidence.

Tout ceci s'applique en l'absence de décollement proprement dit et la production de la surface de discontinuité a été appelée phénomène de décollement simple, par opposition au décolle-

ment double qui se produit dans le cas d'une aile très épaisse ou d'une forte incidence. Il a démontré que le décollement double ne peut se produire, qu'en un point de l'aile où la vitesse est supérieure à $u\sqrt{2}$ (u = vitesse du fluide à l'infini).

Il suppose pour cela que la zone comprise entre les veines décollées (fig. 4) est à une pression constante égale à celle au point de décollement, et que cette zone fluide est entrainée avec la vitesse du solide. Appliquant alors le théorème des quantités de mouvement par l'intermédiaire des équations de Blasius intégrées entre les points de décollement inconnus, on peut facilement déterminer ceux-ci. On en déduit par le fait même la résistance à l'avancement.

C'est ainsi qu'il a pu calculer la force exercée sur un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds supérieur à la valeur critique pour laquelle il y a décollement. On trouve

$$F_x = 0,402 \rho u^2 d \quad (d = \text{diamètre})$$

pour l'air.

$$F_x = 0,05 u^2 d$$

ce qui concorde parfaitement avec les expériences de Joukowski.

Le point de décollement est situé à 42° de la génératrice arrière.

L'auteur fait une approximation d'ailleurs justifiée. Il suppose que le potentiel des vitesses qui existe en dehors de la zone de sillage est sensiblement le même que celui qui régnerait sans le décollement.

B) L'AILE FINIE

La théorie de l'aile finie de Prandtl est basée sur l'existence d'une circulation autour de l'aile et sur le théorème de Joukowski. Elle rend actuellement de grands services dans l'étude expérimentale des profils. Même si on admet que la théorie de Joukowski n'est pas exacte, il n'en reste pas moins vrai que celle de Prandtl détermine la part de résistance de l'aile finie due à la circulation qui « l'entoure ».

Le théorème de Stokes s'écrit :

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz dx = - \int_C u dx + v dy + w dz$$

ou encore :

$$\iint_S p dx dy + q dy dz + r dz dx = - \frac{1}{2} \int_C u dx + v dy + w dz = \frac{1}{2} \Gamma.$$

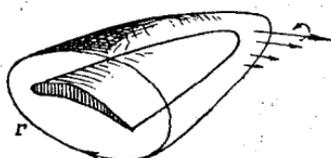


FIG. 17.

Le second membre exprime la demie circulation des vitesses sur un contour C et le premier membre le flux du tourbillon de ce champ de vitesse à travers toute surface s'appuyant sur le contour.

Considérons une aile finie (fig. 17). Le mouvement dans le plan de symétrie de l'aile est un mouvement plan et il existe une circulation Γ . Si nous appuyons sur le contour une surface enveloppant une des extrémités de l'aile, le flux des tourbillons

qui traversent cette surface doit être égal à $\frac{1}{2} \Gamma$. Par consé-

quent, il se crée (particulièrement aux extrémités des tourbillons donnant lieu à une nouvelle résistance à l'avancement venant s'ajouter à l'effet de viscosité. Comme Γ est indépendante de l'envergure de l'aile, cette nouvelle résistance dénommée résistance induite de Prandtl restera constante. Relativement à la force portante qui dépend de l'envergure, elle sera d'autant moindre que celle-ci est plus grande. Pour établir sa théorie, Prandtl a supposé que les tourbillons avaient une répartition elliptique le long de l'aile (fig. 18). Il est en effet naturel d'admettre que Γ varie surtout aux extrémités. Il suppose aussi que les tourbillons sont situés dans une surface en forme de nappe qui prend sa source au bord de fuite de l'aile. Chaque tourbillon est alors infini mais le flux total reste le même. Il se produit une discontinuité au passage à travers cette nappe et le champ de vitesse présente dans un plan normal au mouvement l'allure de la figure 18. La nappe de tourbillons a été observée au laboratoire de Göttingen, telle qu'elle est représentée à la figure 19.

Cette nappe est traversée de haut en bas par un courant.

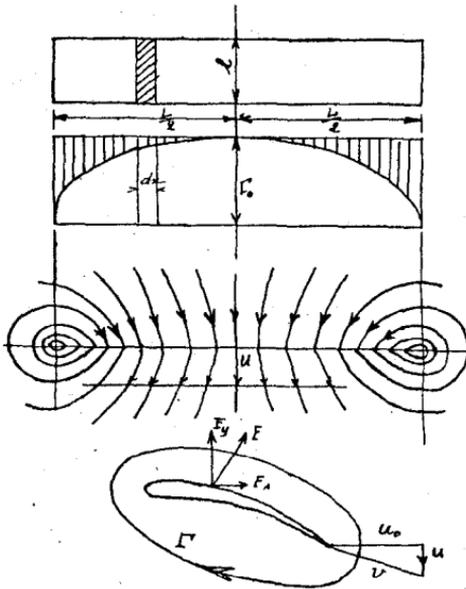


FIG. 18.

de fluide dont la vitesse verticale est constante et vaut en tout point

(1) $u = \frac{\Gamma_0}{2l}$ $L =$ envergure
 $\Gamma_0 =$ circulation dans le plan de symétrie.

Cette vitesse se composant avec la vitesse u de translation du fluide, donne une résultante v inclinée sur l'horizontale. On applique alors le théorème de Joukowski pour chaque élément dx de l'aile, et comme si celle-ci était plongée dans un courant de direction v , la force F trouvée



FIG. 19.

est normale à v , et a pour valeur

$$F = \rho v \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \Gamma dx = \rho v \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{(\frac{L}{2})^2}} dx = \rho v \frac{\pi}{4} \Gamma_0 L.$$

D'où on tire

$$\Gamma_o = \frac{4F}{\rho \pi v L^2} \quad (2)$$

La résistance à l'avancement sera

$$F_x = F \frac{u}{v} \quad (3)$$

et en éliminant Γ_o et u entre (1) (2) (3) $(F_v \cong F)$

$$F_x = \frac{2F_v^2}{L^2 v^2 \rho \pi} \quad (4)$$

La courbe représentative de F_v en fonction de F_x est un parabole dont la constante dépend uniquement de l'envergure.

Voici comment cette théorie a été rendue pratique. Ecrivons l'équation de similitude établie précédemment

$$F = \rho V^2 D^3 \varphi \left(\frac{VD}{v} \right)$$

qu'on peut encore écrire :

$$F = \rho V^2 S \varphi \left(\frac{VD}{v} \right)$$

S = surface de l'aile.

La forme de la fonction φ dépend uniquement de l'incidence de l'aile. Or on sait que si $\frac{VD}{v}$ se maintient entre les valeurs

critiques d'ailleurs très étendues caractérisant l'écoulement autour d'une aile d'avion la fonction φ se réduit sensiblement à une constante. On peut donc écrire :

$$F = C \frac{\rho V^2}{2} S$$

$$F_v = C_v \frac{\rho V^2}{2} S$$

$$F_x = C_x \frac{\rho V^2}{2} S$$

ou les C_v et C_x ne dépendent que de la forme de l'aile et de son incidence. Ils portent respectivement les noms de portance et de traînée de l'aile et sont indépendants des unités.

La courbe $C_y = f(C_x)$, appelée la polaire de l'aile peut être graduée en incidences ; elle dépend du profil de l'aile et de son allongement λ .

$$\lambda = \frac{L}{l} \quad \begin{array}{l} L = \text{envergure.} \\ l = \text{corde ou profondeur de l'aile.} \end{array}$$

Ainsi, par exemple, pour $\lambda = 7$, on obtient la courbe figurée en trait plein (fig. 20). Tel est le résultat expérimental.

La formule de Prandtl (4) peut s'écrire, en remarquant que $l \times L = S$:

$$\frac{F_x}{\rho \frac{v^2}{2} S} = \frac{2F_y^2}{L^2 V^2 \rho \pi \times \rho \frac{v^2}{2} S} = \left(\frac{F_y}{\frac{S \rho v^2}{2}} \right)^2 \frac{1}{\lambda \pi}$$

ou
$$C_{x_i} = \frac{C_y^2}{\lambda \pi}.$$

La polaire théorique devrait être une parabole dont le paramètre dépend uniquement de λ . La traînée théorique C_{x_i} ou « traînée induite » diffère de la traînée réelle par un terme C_{x_p} ou « traînée de profil », dont la valeur a été trouvée indépendante de l'allongement λ et qui dépend par conséquent uniquement du profil de l'aile.

$$C_x = C_{x_p} + C_{x_i}$$

On pourra ainsi, grâce à la formule de Prandtl, calculer la polaire du profil déterminé par une relation

$$C_{x_p} = \psi(C_y)$$

courbe qui caractérisera un profil donné.

La figure 20 donne la polaire réelle relative à un allongement $\lambda = 5$, pour le profil n° 31 du laboratoire de Rhode-Sainte-Genève. Les polaires induites sont représentées en trait fin pour des allongements $\lambda = 5$; $\lambda = 7$. On voit que ces polaires se rapprochent d'autant plus de la verticale que l'allongement est plus grand.

A droite est représentée la polaire du profil. Ce serait la polaire réelle si la longueur de l'aile était infinie ($C_{x_i} = 0$).

Le rapport $\frac{C_y}{C_x}$ maximum s'appelle la finesse de l'aile et a pour valeur $tg\alpha$. L'angle α étant forcément l'angle que fait avec

la verticale la trajectoire de l'aile considérée et descendant en vol plané.

On peut remarquer d'après le graphique que la finesse de cette aile est pour $\lambda = \infty$ de l'ordre de 80 et de 20 seulement pour $\lambda = 5$.

Les ailes les plus avantageuses sont celle de grand allonge-

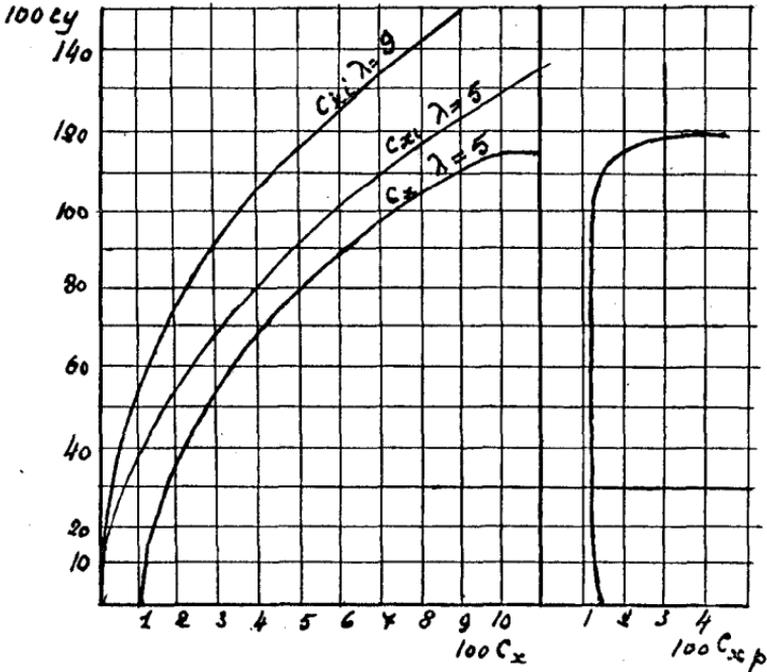


FIG. 20.

ment tant au point de vue du vol que de la puissance nécessaire pour ce vol. On comprend l'infériorité du biplan sur le monoplan dont la résistance induite est moitié moindre.

En résumé : la traînée C_x se décompose en un terme dû à l'inertie C_{xi} variable avec l'incidence uniquement fonction de λ , et en un terme C_{xp} sensiblement constant pour un profil donné. Ce dernier est dû à l'influence de la viscosité de l'air sur le profil.

Si les incidences deviennent trop fortes, on passe par la valeur critique du nombre de Reynolds, et les polaires expérimentales prennent en ce point une allure horizontale. Il se produit un décollement dont l'effet s'ajoute au frottement pour augmenter C_{xp} dans des proportions considérables.

La théorie de Prandtl ne s'applique plus à ce cas, car elle suppose l'absence de décollement. On cherche à obtenir des polaires dont la partie horizontale est la plus élevée possible afin de faciliter l'atterrissage.

Récemment, un nouveau type d'aile a été réalisé par Handley-Page, afin de pouvoir maintenir l'écoulement sans décollement aux fortes incidences, et relever ainsi la partie horizontale de la polaire. C'est une aile percée, ou plutôt un ensemble de deux ailes disposées en tandem. On peut expliquer cet effet par la réduction des vitesses que subissent les filets d'air au dos de l'aile, par suite de l'apport d'air venant par la partie percée. Cela suffirait à rendre cette vitesse inférieure à $u\sqrt{2}$, et empêcher le décollement.

Conclusions

Bien des applications et en particulier la théorie des hélices pourraient être citées. Celles-ci assimilent en général l'hélice à une aile, et donnent lieu à des considérations analogues à ce qui a été dit. Mais elles présentent beaucoup moins de netteté et sont encore en pleine élaboration. D'ailleurs la théorie des ailes elle-même n'est pas encore établie d'une manière définitive et bien des points restent encore à éclaircir. Les problèmes posés par la mécanique des fluides ont une portée extrêmement vaste, et la solution n'est ébauchée que pour un petit nombre d'entre eux.

En ce qui concerne les ailes et les profils fuselés, un grand pas a été accompli. Le but a été partiellement atteint d'interpréter les équations de la mécanique des fluides par un certain nombre de principes rigoureux au caractère puissamment intuitif, donnant lieu à des calculs suffisamment simples et par le fait même susceptibles de faire progresser la technique. On a pu se rendre compte de la grande élégance introduite par les variables complexes dans des calculs qui, sans leur aide, seraient quasi inextricables.

Enfin, la fameuse controverse amenée par le paradoxe de d'Alembert est définitivement tranchée, justifiant les paroles de Helmholtz : « Autant que je puis le voir, il n'existe réellement, à l'heure actuelle, aucune raison pour ne pas considérer les équations hydrodynamiques comme les expressions exactes des lois qui dans la réalité régissent le mouvement des fluides ».

BIBLIOGRAPHIE

N. JOUKOWSKI, *Aerodynamique* ; Paris, Gauthier-Villars, 1916.

LEROUX, *Aéronautique* ; Paris, Béranger, 1927.

WITOSZYNSKI, *La mécanique des profils d'aviation* ; Paris, E. Chiron.

COLLECTIVE WORK, *The Mechanical properties of fluids*, Blackie & Son

EBERHARDT, *Einführung in die theoretische Aerodynamik*, Berlin, Oldenbourg, 1927.

VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* ; Paris, Collection « Scientia ».

GLAUERT, *The elements of aerofoil and airscrew theory* ; Cambridge, 1927.
