SOCIÉTÉ BELGE DES INGÉNIEURS ET DES INDUSTRIELS

— 620.164.3 —

NOTE SUR
L'APLATISSEMENT DES TUBES SOUMIS A PRESSION EXTÉRIEURE

PAR

M. BIOT
Ingénieur civil des mines U. I. Lv.

Extrait du *Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels*
Tome X. — No 4.

BRUXELLES
IMPRIMERIE F. VAN BUGGENHOUDT, S. A.
Rue du Marteau, 5-9

Note sur l'aplatissement des tubes soumis à pression extérieure

PAR

M. BIOT
Ingénieur civil des mines U. I. Lv.

Parmi les nombreux problèmes posés en résistance des matériaux, il en est un dont la solution quoique très simple est assez peu connue.

Lorsqu'un tube circulaire est soumis à une pression extérieure, il ne suffit pas de calculer les fatigues par la formule de Lamé, il faut encore s'assurer que le tube est en état d'équilibre stable. Il se produit en effet pour certaines pressions critiques un aplatissement brusque du tube, alors que bien souvent les limites élastiques ne sont pas atteintes. C'est un phénomène du même type que le flambage d'une pièce droite chargée de bout.

Nous allons considérer l'unité de longueur du tube indéfini soumis à une pression extérieure p (1). Isolons une portion AM du tube. En chaque section M sont appliqués un moment fléchissant $\mathcal{M}$ et une force F.

On démontre facilement que la perpendiculaire à cette force passe par un point fixe O (fig. 1). En effet, la force extérieure agissant sur AM a pour valeur ps passe par le milieu de la corde et est perpendiculaire à celle-ci. Le triangle OAM est semblable au triangle des forces, et le coefficient de proportionnalité

---

(1) p est l'excès de la pression extérieure sur la pression intérieure.

constant quelque soit le point M vaut p. La force F_A étant constante le coté correspondant $OA = \frac{F_A}{p}$ est constant en grandeur et en direction. Le point O est donc bien un point fixe.

On a d'ailleurs : $F = pr$.

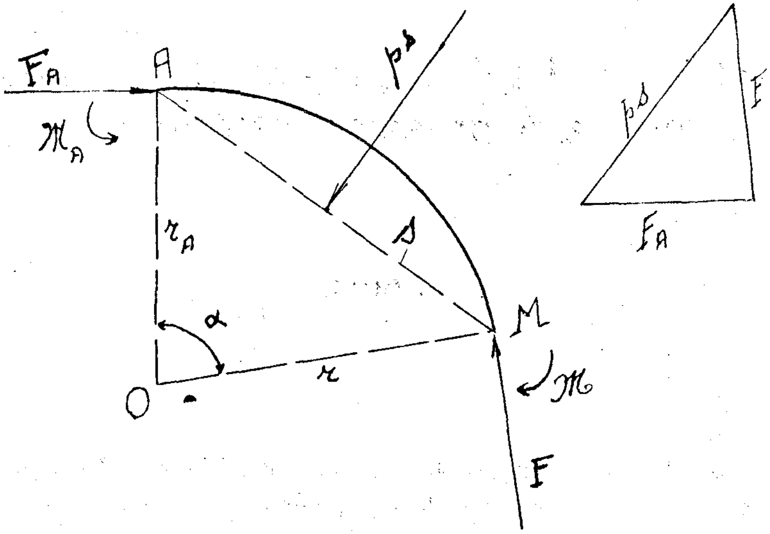

fig 1

Ceci va nous donner une expression simple du moment fléchissant :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_A + \frac{ps^2}{2} - p\, r_A\,(r_A - r\cos\alpha)$$

or :

$$s^2 = r_A^2 + r^2 - 2\, r_A\, r \cos\alpha,$$

d'où en posant :

$$\mu = \mathcal{M}_A - \frac{p\, r_A^2}{2}$$

$$\mathcal{M} = \mu + \frac{pr^2}{2}$$

Soit R le rayon de la fibre moyenne du tube non déformé et $R + \rho$ la distance au centre de cette même fibre après déformation, ρ étant un infiniment petit du premier ordre (fig. 2),

La courbure a pour expression $\frac{d\varphi}{ds}$ soit en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur :

$$\frac{-d\,\frac{d\rho}{R\,d\theta} + d\theta}{(R+\rho)\,d\theta}$$

En remarquant qu'au second ordre près :

$$\frac{1}{R+\rho} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)$$

Cette expression devient :

$$-\frac{d^2\rho}{R^2\,d\theta^2} - \frac{\rho}{R^2} + \frac{1}{R}.$$

L'accroissement de courbure est donc :

$$-\frac{d\,\rho}{R^2\,d\theta^2} - \frac{\rho}{R^2}.$$

En tenant compte de l'expression du moment fléchissant établi ci-dessus, l'équation de l'élastique est donc :

$$-\,EI\left[\frac{d^2\rho}{R^2\,d\theta^2} + \frac{R}{\rho}\right] = \mu + \frac{p\,r^2}{2}.$$

Nous supposons que la déformation est infiniment petite, dès lors le point O est à une distance a infiniment petite également du centre du cercle :

$$r = (R+\rho)^2 + a^2 - 2\,(R+\rho)\,a\cos\theta.$$
$$= R^2 + 2\,R\,\rho - 2\,R\,a\cos\theta.$$

Posons :

$$1 + \frac{p\,R^3}{EI} = \lambda$$

$$-\frac{R^2}{EI}\left[\frac{p\,R^2}{2} + \mu\right] = b$$

$$\frac{R^3}{EI}\,a\,p = c$$

L'équation de l'élastique devient en remplaçant r^2 par sa valeur :

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \lambda^2 \rho = b + c \cos \theta.$$

L'intégrale générale de cette équation est :

$$\rho = \mathrm{A} \cos \lambda\, \theta + \mathrm{B} \sin \lambda\, \theta + \frac{b}{\mathrm{R}^2} + \frac{c}{(\mathrm{R}^2 - 1)} \cos \theta.$$

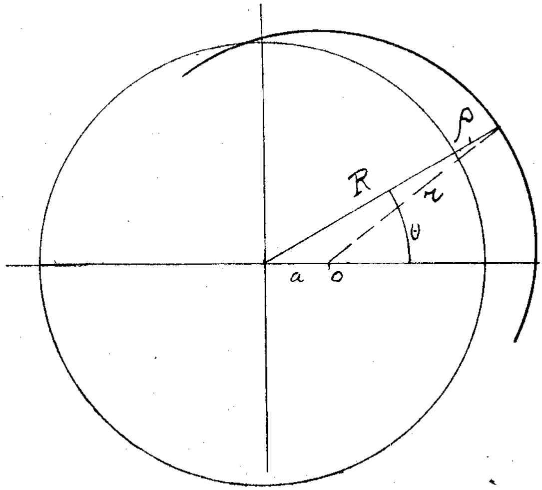

fig 2.

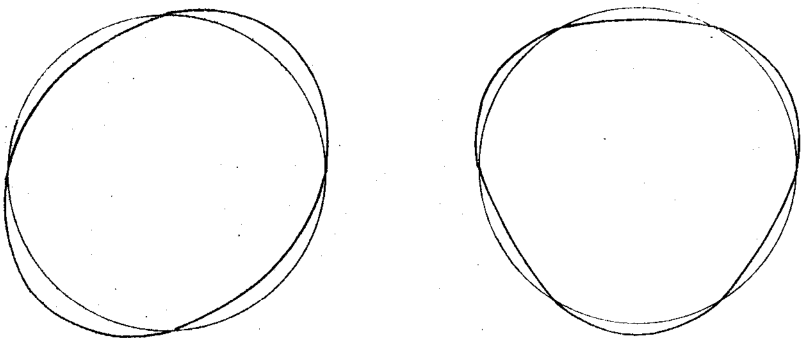

fig 3.

Les deux derniers termes représentant respectivement une dilatation et une translation n'interviennent pas dans le phénomène de flambage.

La fonction ρ doit nécessairement être périodique de période 2π, ce qui exige :

$$\lambda = k \text{ entier.}$$

Pour $k = 1$. On a affaire à une simple translation de l'ensemble du tube. Ce cas ne nous intéresse pas.

Pour $k = 2$. La déformation est un aplatissement elliptique ou bilobé.

Pour $k = 3, 4...$ La déformation est trilobée, etc. (fig. 3).

En introduisant la valeur de λ les pressions critiques correspondantes sont données par :

$$p_k = \frac{EI}{R^3}\left[k^2 - 1\right].$$

La pression critique la plus faible étant :

$$p_2 = \frac{3\,EI}{R^3}.$$

En explicitant la valeur de I pour un tube cylindrique lisse (sans nervures) d'épaisseur δ :

$$I = \frac{\delta^3}{12}.$$

$$p_2 = \frac{E}{4}\left(\frac{\delta}{R}\right)^3.$$

En réalité dans ces formules E n'est pas le coefficient d'élasticité qui intervient dans le cas d'une pièce prismatique ordinaire. Il faut, en effet, tenir compte de ce que pour un tube lisse la contraction ou dilatation latérale des fibres étendues ou comprimées du tube est ici supprimée. La formule définitive sera donc, en désignant par σ le coefficient de Poisson.

$$p_2 = \frac{E}{4\,(1 - \sigma^2)}\left(\frac{\delta}{R}\right)^3.$$

Il n'y aurait pas lieu en général d'effectuer cette correction pour les tubes fortement nervurés comme les cuvelages de puits de mines.