SOCIÉTÉ BELGE DES INGÉNIEURS ET DES INDUSTRIELS

624.068
531.256

NOTE
sur le
Calcul d'un arc d'égale résistance

PAR

M. BIOT
Ingénieur civil des Mines
Ingénieur électricien U. I. Lv.

Extrait du *Bulletin de la Société Belge des Ingénieurs et des Industriels*
Tome X. — N° 8

BRUXELLES
IMPRIMERIE F. VAN BUGGENHOUDT, S. A.
Rue du Marteau, 5-9

624.068
531.256

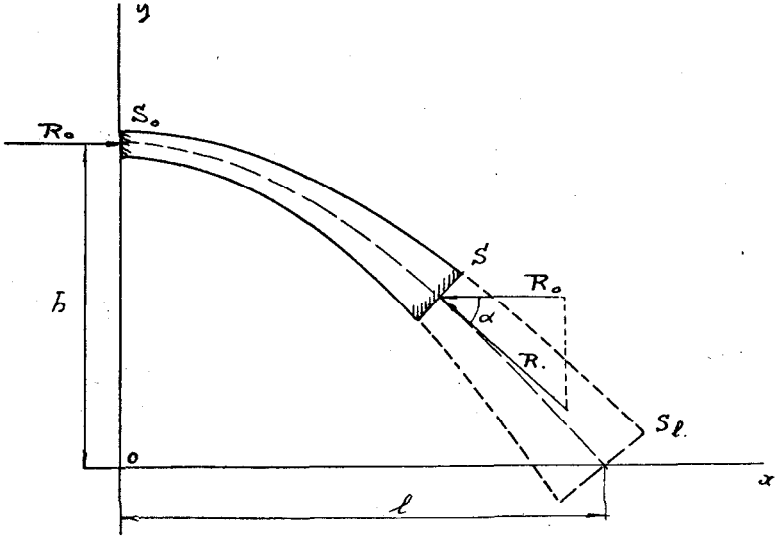
Note sur le calcul d'un arc d'égale résistance

PAR

M. BIOT

Ingénieur civil des Mines
Ingénieur électricien U. I. Lv.

Il peut être utile dans l'établissement d'un avant-projet de pont en arc ou d'une voûte de grande portée tant pour éviter certains tâtonnements que pour discuter aisément les conditions les plus favorables, de connaître la solution du cas idéal suivant.



On s'astreint à n'avoir dans chaque section qu'une compression uniforme τ égale à la tension de compression admissible, ce qui

implique le passage de la résultante par le centre de gravité de la section. De plus l'arc est supposé soumis à une surcharge uniforme p par unité de longueur, et à son propre poids de valeur spécifique δ. Il s'agit de rechercher la forme de l'arc et sa section S en chaque point.

Soient x y les coordonnées d'un point de la ligne des centres de gravité (voir figure) et prenons l'axe des y pour axe de symétrie. Appelons R_0 la compression horizontale totale agissant dans la section de clef et R la compression totale dans une section quelconque. Isolons statiquement la portion d'arc ainsi délimitée. Toutes les forces autres que celles agissant sur les sections terminales étant verticales il faut que la composante horizontale de R soit égale à R_0. Dès lors la composante verticale de R vaut :

$$- R_0 \operatorname{tg}. \alpha = - R_0 y'.$$

D'autre part la somme des projections verticales des forces devant être nulle il vient :

$$\int_0^x p\, dx + \int_0^x \delta S\, ds = - R_0 y'$$

d'où en différentiant :

$$p\, dx + S \delta\, ds = - R_0\, dy' \qquad (1)$$

La condition pour que dans chaque section la compression soit celle de sécurité s'écrit

$$S = \frac{R}{\tau} \qquad (2)$$

La compression totale R est liée à sa projection horizontale R_0 par la relation :

$$R = R_0 \frac{ds}{dx} \qquad (3)$$

En outre en appelant S_0 la section de clef :

$$S_0 = \frac{R_0}{\tau} \qquad (4)$$

Eliminant maintenant S, R, R_0 entre les équations (1), (2), (3), (4), il vient :

$$p\,dx + S_0\,\delta\,(1 + y'^2)\,dx = -S_0\,\tau\,dy'.$$

Posons :

$$a = \sqrt{\frac{p}{S^0\,\delta} + 1}$$

L'équation différentielle se met sous la forme immédiatement intégrable :

$$dx = -\frac{\tau}{\delta\,a}\,\frac{\frac{dy'}{a}}{1 + \left(\frac{y'}{a}\right)^2}$$

Soit en tenant compte de la condition initiale ($y' = o$ $x = o$) et en intégrant :

$$x = -\frac{\tau}{\delta\,a}\,.\,\text{arc tg.}\left(\frac{y'}{a}\right)$$

En résolvant par rapport à y' et intégrant une seconde fois :

$$y' = -a\ \text{tg.}\left(x\,.\,\frac{\delta\,a}{\tau}\right) \qquad (5)$$

$$y - h = \frac{2}{\pi}\,l_0\ \text{Log. cos.}\left[\frac{\pi\,a}{2}\,.\,\frac{x}{l_0}\right] \qquad (6)$$

$$\text{avec} \qquad l_0 = \frac{\pi}{2}\,\frac{\tau}{\delta}.$$

Telle est l'équation de l'arc d'égale résistance ou la constante d'intégration h représente la flèche. La section de l'arc est donnée par les équations (2), (3), (5).

$$S = S_0\sqrt{1 + y'^2} = S_0\sqrt{1 + a^2\ \text{tg.}^2\left[\frac{x}{l_0}\,\frac{\pi\,a}{2}\right]} \qquad (7)$$

D'autre part la demi-portée l est liée à la flèche h par la relation suivante obtenue en faisant $y = o$ dans (6) :

$$h = -\frac{2}{\pi}\,l_0\ \text{Log. cos.}\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{a\,l_0}{l}\right) \qquad (8)$$

De même la section aux naissances sera

$$S_l = S_0 \sqrt{1 + a^2 \operatorname{tg.}^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{l} \frac{l_0}{l}\right)} \qquad (9)$$

L'interprétation physique de la longueur l_0 qui figure dans ces équations est immédiate. Supposons en effet $a = 1$, c'est-à-dire $p = o$. L'arc ne supporte que son propre poids. Si alors dans les équations (8) et (9) nous donnons à l la valeur l_0 nous obtenons pour h et S_0 des valeurs infinies. La longueur l_0 est donc la demi-portée maxima théoriquement admissible lorsque la surcharge est nulle. C'est une caractéristique du matériau.

Nous donnons à $2\ l_0$ le nom de portée limite. En voici quelques valeurs :

Béton : $\delta = 2.500$ kg./m³; $\tau = 500.000$ kg./ m²; $2\ l_0 = 628$ m.

Acier doux : $\delta = 7.800$ kg./ m³; $\tau = 10.000.000$ kg./m²; $2\ l_0 = 4.020$ mètres.

Métal léger : $\delta = 2.800$ kg./ m³; $\tau = 5.000.000$ kg./m²; $2\ l_0 = 5.610$ mètres.

La valeur de S_0 peut être choisie arbitrairement dans tous les cas. Par contre celle de a n'est fonction de S_0 et différente de l'unité que si la surcharge est nulle.

Ainsi donc une infinité simple d'arcs répondent au problème, et selon qu'il supporte ou non une surcharge p la forme de l'arc et sa section varient simultanément, ou bien sa section seule reste arbitraire. Pratiquement cette dernière alternative a lieu lorsque la surcharge peut être considérée comme faible vis-à-vis du poids de l'arc, car dans ce cas le paramètre a diffère peu de l'unité à moins de donner à S_0 des valeurs ridiculement petites.

Lorsque la surcharge existe on peut par exemple se donner arbitrairement la flèche et en déduire S_0. Si nous partons pour h d'une valeur faible la compression dans la section de clef sera très grande ce qui exige une section S_0 très forte, mais celle-ci diminue à mesure qu'on adopte des flèches de plus en plus grandes pour tendre vers zéro lorsque h devient infini. On prévoit dans ces conditions que le poids de l'arc passe par un minimum.

Par contre, dans le cas d'une voûte sans surcharge, le profil étant parfaitement déterminé il n'y a pas de minimum pour le poids.

Nous allons considérer le premier cas où il existe une surcharge p et rechercher comment le poids et la forme de l'arc varient en fonction du paramètre arbitraire.

Evaluons à cet effet le demi-poids P de l'arc, il vient :

$$P = \delta \int_0^l S\, ds = \delta\, S_0 \int_0^l \left[1 + a^2 \operatorname{tg.}^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{a}{l_0} x\right)\right] dx$$

En effectuant les calculs et en posant $\frac{l}{l_0} = u$ on trouve :

$$k = \frac{P}{pl} = \frac{a^2}{a^2 - 1} \cdot \frac{\operatorname{tg.} \frac{\pi}{2} au}{\frac{\pi}{2} au} - 1 \qquad (10)$$

Toutes les grandeurs de cette équation sont sans dimensions et se prêtent aisément à la discussion, k n'étant d'ailleurs plus fonction que de deux paramètres a et u. On voit immédiatement que la fonction passe par un minimum pour une valeur de a comprise entre 1 et $\frac{1}{u}$.

Pour ces valeurs extrêmes en effet $k = \infty$.

A toute valeur u correspond donc une valeur de a pour laquelle k est minimum. Comme il fallait s'y attendre la forme complète de l'arc correspondant à cette condition c'est-à-dire à la fois son profil et sa section, ne dépend nullement de la valeur de la surcharge, mais uniquement du rapport de sa portée à la portée limite du matériau considéré.

En dérivant l'équation (10) par rapport à a on obtient la condition suivante qui détermine a en fonction de u lorsque k est minimum.

$$\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} \pi au = \sin. \pi au. \qquad (11)$$

Les valeurs correspondantes sont données au tableau IV. L'inverse de k peut être considéré comme le facteur de qualité de l'arc : son maximum correspond à l'arc présentent le plus faible poids par unité de surcharge totale.

Pour rechercher comment varie la forme de l'arc, il suffit de considérer le rapport $\frac{h}{l}$ de la flèche à la demi-portée et celui $\frac{S_l}{S_0}$ de la section aux naissances à celle à la clef.

Leurs expressions sont :

$$m = \frac{h}{l_o} = -\frac{2}{\pi u} \cdot \text{Log. cos.} \left(\frac{\pi}{2} au\right)$$

$$n = \frac{S_l}{S_o} = \sqrt{1 + a^2 \text{ tg.}^2 \left(\frac{\pi}{2} au\right)}$$

Différents tableaux donnent les valeurs de k, m, n en fonction de a et u.

I. — Valeurs de k.

a	u			
	1/8	1/4	1/2	2/3
1	∞	∞	∞	∞
1,1	4,8	5,1	6,75	10,3
1,2	2,32	2,55	3,77	7,05
1,3	1,5	1,7	2,92	7,3
1,4	1,08	1,29	2,65	11,9
1,5	0,85	1,05	2,68	∞
1,6	0,69	0,88	3	
1,7	0,58	0,78	3,8	
1,8	0,5	0,73	5,45	
2,0	0,4	0,70	∞	
2,4	0,31	0,77		
2,8	0,26	1,03		
3,2	0,29	2,33		
4	0,35	∞		
5	0,58			
7	2,68			
8	∞			

II. — Valeurs de m.

a	u			
	1/8	1/4	1/2	2/3
1	0,0995	0,205	0,442	0,62
1,1	0,12	0,246	0,55	0,865
1,2	0,143	0,299	0,677	1,13
1,3	0,169	0,351	0,832	1,48
1,4	0,196	0,409	1,0	2,17
1,5	0,225	0,474	1,22	∞
1,6	0,256	0,542	1,49	
1,7	0,279	0,605	1,85	
1,8	0,326	0,693	2,36	
2,0	0,405	0,89	∞	
2,4	0,589	1,35		
2,8	0,82	2,0		
3,2	1,08	3		
4	1,77	∞		
5	3,6			
7	8,35			
8	∞			

III. — Valeurs des n.

a	u			
	1/8	1/4	1/2	2/3
1	1,02	1,08	1,41	1,96
1,1	1,025	1,14	1,65	2,7
1,2	1,04	1,17	1,95	3,85
1,3	1,06	1,23	2,4	6,1
1,4	1,07	1,32	2,9	13
1,5	1,10	1,41	3,8	∞
1,6	1,125	1,53	5,2	
1,7	1,16	1,67	7,15	
1,8	1,2	1,83	13,4	
2,0	1,25	2,25	∞	
2,4	1,58	3,5		
2,8	2,0	5,65		
3,2	2,55	9,9		
4	4,2	∞		
5	7,6			
7	26			
8	∞			

En résolvant l'équation (11) qui donne pour chaque valeur de u celle de a rendant k minimum et en calculant les valeurs correspondantes de k, m, n on trouve :

IV.

u	a	k	m	n
1	1			
0,835	1,1	30,6	1,58	8,8
0,7	1,2	8,65	1,26	4,8
0,6	1,3	4,57	1,15	3,75
0,52	1,4	2,94	1,08	3,25
0,453	1,5	2,04	1,02	2,9
0,359	1,7	1,26	0,98	2,65
0,255	2	0,72	0,905	2,3
0,166	2,5	0,38	0,880	2,15
0,113	3	0,23	0,843	2,05
0,055	4	0,109	0,717	1,75

Considérons par exemple le pont en ciment armé de Saint-Pierre du Vauvray (Eure), constitué d'un arc ayant approximativement 132 mètres de portée et 30 mètres de flèche. Le tablier est soutenu par des suspentes métalliques légères. C'est bien là le type qui se rapproche le plus des conditions théoriques supposées dans l'étude précédente. S'il était calculé uniquement pour une surcharge uniforme la théorie s'appliquerait en toute rigueur. La portée limite du ciment armé étant 628 mètres on a :

$$u = \frac{132}{628} = 0{,}213$$

La condition du minimum de k donne (Tableau IV) :

$$k = 0{,}70$$
$$m = 0{,}9 \qquad a = 2$$
$$n = 2{,}3$$

La flèche serait donc 66 × 0,9 = 59 mètres. Soit environ le double de sa valeur réelle.

La valeur réelle de m étant $\frac{30}{66} = 0{,}45$, le tableau II donne pour $u = \frac{1}{4}$ la valeur $a = 1{,}5$ et le tableau I, $k = 1$.

Ceci prête à une remarque intéressante.

Si nous examinons le tableau I nous voyons qu'il existe dans la colonne $u = \frac{1}{4}$ une zone qui va de $a = 2$ à $a = 1{,}5$ dans laquelle le poids relatif de l'arc varie de 0,70 à 1.

Si l'on passe de $a = 1{,}5$ à $a = 1{,}4$, k monte brusquement à la valeur 1,29 et l'excédent de poids au-dessus du minimum se trouve doublé.

On voit donc que l'arc de Saint-Pierre du Vauvray a été précisément choisi pour cette valeur limitée. C'est qu'il faut en effet tenir compte du prix élevé du cintre et des colonnes de support qui augmente rapidement avec la hauteur de l'arc.

On a évidemment intérêt à augmenter le poids de l'arc en choisissant précisément la valeur précitée, à partir de laquelle la diminution de hauteur ne compense plus l'augmentation de poids.

On pourrait d'ailleurs traiter le problème de manière plus complète dans un cas pratique en construisant une table du prix (q) de la tonne de matériau mise en œuvre en fonction de m. L'arc optimum serait alors celui qui donnerait la valeur minimum au produit.

$$k\ q$$

Nous n'avons envisagé dans cette courte étude qu'un aspect évidemment restreint du problème de la construction d'un arc, mais dont l'importance augmente avec la portée.

Remarquons cependant que l'étude de la résistance au moment fléchissant sous l'effet de charges autres que celles que nous avons envisagées est un problème théoriquement indépendant du précédent puisque nous sommes toujours libres de disposer des moments d'inertie, quitte à prendre pour R une valeur plus faible.