M. BIOT
Ingénieur civil des Mines
Ingénieur-Électricien (U. l. Lv.)

L'Hydrodynamique moderne

et

ses applications

Extrait de la *Revue des Questions scientifiques*, septembre 1930

LOUVAIN
Établissements FR. CEUTERICK
60, RUE VITAL DECOSTER, 60

1930

L'Hydrodynamique moderne et ses applications

L'étude mathématique de la déformation des milieux continus, constitue une des branches les plus importantes de la mécanique rationnelle. Les groupes de postulats induits de l'expérience, par les relations existant entre la déformation et les forces intérieures, sont à la base de deux grands chapitres que l'on peut désigner sous le nom de théorie de l'élasticité et de mécanique des fluides. Dans le premier, les forces intérieures sont considérées comme fonctions en général des dérivées des déplacements, tandis que dans le second ces forces sont ou bien indépendantes des déformations (fluides dits parfaits) ou bien liées aux dérivées des vitesses. Les expressions fondamentales généralement adoptées pour les forces intérieures sont, malgré leur caractère linéaire, suffisamment approchées pour rendre compte de nombreux phénomènes, mais elles ne peuvent être envisagées comme absolument générales, non seulement pour les milieux solides mais encore pour les fluides visqueux.

Cependant, malgré la simplicité relative des postulats, les équations du mouvement de ces milieux sont extrêmement ardues à traiter dans leurs applications.

Les principales difficultés proviennent de ce que le système d'équations aux dérivées partielles sous la forme d'Euler, où les composantes de la vitesse sont les inconnues, renferme des termes quadratiques. En outre, si

l'on fait intervenir la viscosité, ces équations passent du premier au second ordre.

Les équations du mouvement des fluides parfaits sont donc les plus simples analytiquement. Ceci explique que, depuis Huyghens et Mariotte jusqu'à nos jours, leur étude soit de loin la plus développée. Toujours est-il qu'ici même il a fallu bien longtemps pour se rendre compte exactement des phénomènes résumés par les équations.

Les études d'Huyghens, reprises par Newton, furent le point de départ d'un essor considérable de l'hydrodynamique, sous les auspices des mathématiciens les plus illustres, tels que Bernoulli, Euler, Lagrange, et notamment Helmholtz, dont la théorie des tourbillons peut être comparée aux plus beaux développements de l'électromagnétisme.

Malheureusement, au point de vue physique, ces résultats n'étaient guère applicables qu'à un domaine restreint de phénomènes.

C'est ainsi qu'en 1897, lorsque Ader prit son envol sur le premier appareil mécanique à moteur, la discussion portait sur la question de savoir si la résistance exercée par l'air sur un plan était proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence ou à son carré (loi de Newton).

Le seul point sur lequel on fût d'accord était la proportionnalité de la résistance au carré de la vitesse. On peut dire que la croyance à la loi de Newton, aujourd'hui reconnue grossièrement fausse, fut la cause de bien des hésitations chez les premiers inventeurs d'engins de vol : cette loi donnant pour les incidences faibles des forces portantes beaucoup trop réduites.

La création des engins de vol au début de ce siècle vint apporter à l'étude mathématique une contribution expérimentale de plus en plus abondante. Une collaboration étroite s'établit entre théoriciens et expérimentateurs. Déjà à la fin du siècle dernier Kirchhoff et Lord

Rayleigh développant les idées d'Helmholtz avaient attiré l'attention sur la présence de surfaces de discontinuité dans l'écoulement des fluides. Mais la mécanique des fluides parfaits, si elle permet d'étudier un pareil cas posé à priori, est incapable d'en prévoir et d'en expliquer la naissance.

Ces théories aux mains d'habiles physico-mathématiciens, tels que Boussinesq, Stokes, W. Thomson, donnèrent bientôt la clef d'un grand nombre de phénomènes relatifs à l'écoulement des liquides et notamment de la houle, par une des rares solutions rotationnelles rigoureuses que l'on connaisse des équations des fluides parfaits. C'est aussi de cette époque que datent les premières solutions des équations des fluides visqueux, simplifiées et rendues linéaires en négligeant les forces d'inertie. La remarquable théorie de Reynolds, sortie récemment de l'oubli, a jeté la base des théories actuelles de la lubrification.

La théorie des ondes de surface, bien qu'elle soit une des premières en date, fut arrêtée dès ses débuts par des difficultés analytiques considérables, et le problème de la résistance à l'avancement des corps flottants ne semble pas près d'être résolu.

Cependant la théorie dite du sillage a donné lieu à de nombreux développements dus à MM. Brillouin, Cissotti, ainsi qu'à Lévi Civita en 1907 et Villat en 1911, qui sont arrivés à déterminer ces sillages pour des corps de formes quelconques immergés dans un courant plan (1). La théorie de Kirchhoff peut être considérée à l'heure actuelle comme ayant atteint son développement définitif.

Malheureusement, ici encore les résultats théoriques ne rendent compte des phénomènes que d'une manière

(1) Courant tel que le fluide a le même mouvement dans tous les plans perpendiculaires à une direction donnée.

très grossière. L'expérience a prouvé que dans bien des cas, et notamment pour les profils portants, ils ne traduisent pas le régime qui s'établit.

Des résultats vraiment intéressants ne furent obtenus que le jour où l'on comprit la nécessité de dissocier le problème. Puisque l'étude directe des équations des fluides visqueux était inabordable, et que d'autre part il semblait établi qu'une fois le régime atteint, il se créait des zones où le mouvement était sensiblement celui d'un fluide parfait, et d'autres où la viscosité intervenait, il fallait étudier séparément ces différentes zones, en se basant sur des faits expérimentaux bien établis.

Dès 1894, le physicien anglais Lanchester avait exposé certaines considérations sur la circulation des vitesses autour des surfaces portantes. Reprenant cette idée et sans s'inquiéter de la contradiction avec le théorème de Lagrange, W. N. Kutta en Allemagne en 1902 et le professeur Joukowski en Russie en 1905, donnèrent l'expression de la force de sustentation d'une aile d'envergure infinie dans un fluide parfait. Ces savants seraient d'ailleurs parvenus par des voies complètement indépendantes.

Le théorème de Kutta-Joukowski constitue une base très satisfaisante sur laquelle s'appuient actuellement les développements si féconds de la théorie des surfaces portantes.

En 1904, le professeur Prandtl, voulant reconnaître l'influence de la viscosité sur la formation des tourbillons et surfaces de discontinuité, eut l'idée de diviser le problème. Sa théorie dite « des couches limites » étudie le mouvement d'un fluide dans une zone mince au voisinage immédiat des parois solides qu'il baigne. En 1911, son collaborateur le professeur Karman, poursuivant la même idée, édifia une théorie tourbillonnaire de la résistance à l'avancement.

Le résultat le plus important de tous ces travaux fut certainement la théorie de l'aile finie de Prandtl.

Elle marque une étape décisive dans les méthodes de calcul des surfaces portantes. Élaborée durant la guerre pour faire face aux exigences de la technique aéronautique, elle dut sa vogue rapide à l'élégance et la simplicité de ses formules et surtout à l'excellente approximation qu'elle permettait d'atteindre.

En ce qui concerne les équations des fluides visqueux, les résultats s'échelonnant sur ces vingt dernières années semblent bien montrer que leur solution comporte d'énormes difficultés.

Dès 1906 Oseen avait apporté une solution au cas où les vitesses sont petites, et en supposant données toutes les forces extérieures. En 1910, la découverte de certaines solutions fondamentales (potentiels d'Oseen) lui permit d'en exprimer de plus générales directement en fonction des conditions initiales et aux limites. Une solution exacte des équations complètes du mouvement plan des fluides visqueux incompressibles lorsque les lignes de courant sont circulaires ou radiales fut publiée en 1916 par Hamel. Ce dernier cas met en évidence le mécanisme de l'écoulement laminaire dans une tuyère convergente ou divergente et prévoit l'allure essentiellement différente du phénomène dans les deux cas. Les travaux plus récents perfectionnent la théorie des surfaces portantes, comme celles de Witoszynski, l'adaptent à la théorie des hélices ou encore accommodent les formules d'Oseen à des cas particuliers. Nous allons passer en revue les principaux résultats acquis en nous limitant aux applications qui concernent la résistance à l'avancement et la sustentation des corps immergés ; ce sont de loin les plus importantes.

Le paradoxe de d'Alembert

Le théorème bien connu de Lagrange, établi en 1781 et démontré rigoureusement par Cauchy en 1815, peut

être considéré comme un des plus fondamentaux de la mécanique des fluides.

Il affirme que la circulation des vitesses dans un fluide parfait, est constante le long d'une même ligne fluide quand les forces extérieures dérivent d'un potentiel.

En particulier si le mouvement d'une portion de fluide est irrotationnel il se maintient tel indéfiniment. Là gît une source de simplification et à la fois de difficultés pour la théorie. Le caractère irrotationnel du mouvement joint à l'équation de continuité du fluide supposé incompressible ramène en effet le problème à la simple détermination d'un potentiel des vitesses satisfaisant à l'équation de Laplace. Par contre, le même théorème donne lieu comme nous allons le voir au paradoxe de d'Alembert. Supposons qu'un solide se meuve d'un mouvement uniforme dans un fluide parfait. Celui-ci étant primitivement immobile, son mouvement dérive, à chaque instant, d'un potentiel et l'on peut démontrer que s'il n'existe aucune discontinuité à l'infini la résultante des actions hydrodynamiques sur le solide est rigoureusement nulle, abstraction faite de la pression hydrostatique. Cet échec oblige de tenir compte de la viscosité pour expliquer les phénomènes de résistance et de sustentation.

La force due à la viscosité qui s'exerce sur l'unité de volume du fluide incompressible dans la direction de la composante u de la vitesse a pour expression

$$\mu \Delta u$$

où μ désigne le coefficient de viscosité. Si le mouvement est supposé sans tourbillons, la vitesse dérive d'un potentiel et les forces dues à la viscosité sont nulles.

Ainsi donc, même pour un fluide visqueux on peut affirmer la permanence du caractère irrotationnel du mouvement. Physiquement ceci n'est rigoureux que si les forces intérieures répondent bien à leur expression

analytique. Celle-ci fait abstraction notamment de la cohésion. Dès lors dans toute région n'ayant pas été en contact avec le solide on peut, si le fluide est incompressible, appliquer les équations des fluides parfaits. Toutefois nous ignorons la configuration de la région qui aura pris contact avec le solide et nous touchons ici la principale source de difficultés. La viscosité joue un rôle prépondérant, dont l'évaluation exige qu'on résolve les équations des fluides visqueux. Son action directe par frottement sur la résistance est très faible comparée à son action indirecte, qui détermine la configuration du fluide et partant les pressions, de façon à mettre en défaut le paradoxe de d'Alembert. Cette exiguïté de la cause en regard de son effet donne au phénomène son caractère d'instabilité peu accessible au calcul et si sensible à l'influence de facteurs apparemment secondaires comme la nature des parois, la turbulence préexistant dans le fluide, etc.

Recherches expérimentales

On peut dire que jusqu'ici l'expérience seule a permis de prévoir la configuration du mouvement. Elle confirme bien que la cause de la résistance est l'action tangentielle de viscosité du solide immergé.

Cette action est double.

1° Autour du corps, dans une couche mince le mouvement est régi par la loi des fluides visqueux.

2° Ailleurs il est sensiblement celui d'un fluide parfait, sauf dans le prolongement de la couche précédente, où règnent des tourbillons et surfaces de discontinuité, sources de la résistance hydrodynamique.

Les recherches sur l'écoulement ont établi l'existence, pour la plupart des solides, de vitesses critiques entre lesquelles la configuration du champ des vitesses se maintient la même.

Des considérations basées sur la similitude mécanique ont rendu dans ces études d'énormes services. Elles ont pour but de trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire deux fluides en mouvement pour que les mesures faites dans l'un au moyen d'un certain système d'unités soient égales à celles faites dans l'autre moyennant un changement éventuel des trois unités fondamentales. Soit, par exemple, quelques solides semblables. Appelons D la distance de deux points homologues, V les vitesses de translation uniforme des solides, ρ la masse spécifique du fluide qui les baigne et $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ sa viscosité cinématique. La force qui s'exerce sur un solide a pour expression

$$F = \rho V^2 D^2 \varphi (V, D, \nu, \rho).$$

F ne dépend en effet que de V, D, ν, ρ ; il suffit d'examiner les équations du mouvement pour s'en rendre compte. Or la fonction φ doit être sans dimensions. Le paramètre ν ayant pour dimensions L^2T^{-1}, on voit que la masse M n'entrera dans φ que par ρ. Dès lors la fonction φ doit être indépendante de ce paramètre. La seule combinaison de dimension nulle de V, D, ν est $\frac{VD}{\nu}$ et il vient finalement

$$F = \rho V^2 D^2 \varphi \left(\frac{VD}{\nu}\right).$$

La condition de similitude est donc ici la constance de $\frac{VD}{\nu}$ (nombre de Reynolds). Nous n'avons démontré cette condition que pour F. En réalité la similitude s'étend à la configuration entière du mouvement. D'autres lois du même genre ont été établies ; par exemple, celle de Froude,

$$F = \rho D^2 V^2 \varphi \left(\frac{V^2}{Dg}\right),$$

tient compte de la pesanteur ; elle joue un rôle dans l'étude de la résistance des corps flottants ; celle de Bairstow et Booth tient compte de la compressibilité et régit les phénomènes de cavitation

$$F = \rho D^2 V^2 \varphi \left(\frac{V}{C}\right),$$

où C désigne la vitesse du son.

On conçoit la grande simplification ainsi introduite. L'étude expérimentale de F se ramène à celle de la fonction φ.

L'expérience a établi qu'elle passe par des valeurs critiques où elle est discontinue et même multiforme, mais entre lesquelles elle se maintient sensiblement constante et répond à une configuration déterminée de l'écoulement. Citons le cas d'un cylindre très long plongé dans un courant perpendiculaire à ses génératrices.

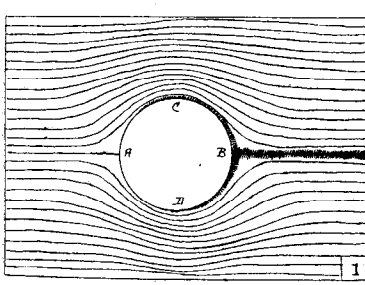


Fig. 1.

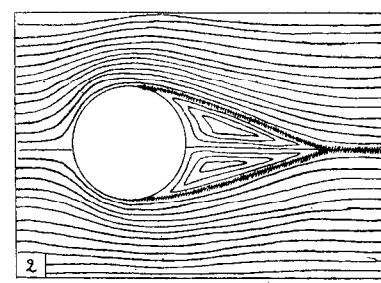


Fig. 2.

Les figures (1) et (2) représentent le champ des vitesses pour un nombre de Reynolds inférieur à 200 (D = diamètre). Lorsqu'il est compris entre 200 et 3000 (1) l'écoulement n'est plus permanent, une suite alternée de tourbillons (tourbillons de Karman) prend naissance derrière le cylindre et se déplace dans le sens du fluide avec une vitesse légèrement inférieure. Le cylindre subit des poussées latérales alternatives (fig. 3). On croit devoir attribuer à cette cause le bruissement des fils

télégraphiques sous le vent. Pour des valeurs supérieures à 3000, les filets fluides décollent complètement du cylindre : il se crée un sillage où le mouvement est turbulent et la pression sensiblement constante entre les points de décollement (fig. 4).

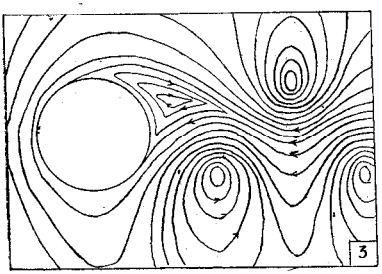


FIG. 3.

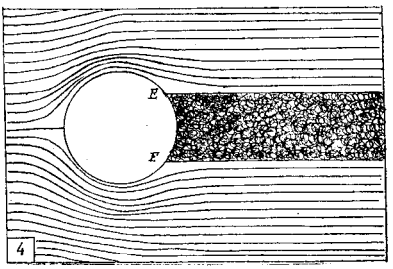


FIG. 4.

Lorsque la vitesse atteint celle du son, un phénomène nouveau apparaît : la compressibilité entre en jeu et de l'énergie est rayonnée sous forme d'une onde conique mise en évidence par l'étude du mouvement des projectiles (fig. 5). C'est une limite à ne pas approcher lorsqu'on veut réduire la perte d'énergie. Dans ce but on évitera par exemple de donner aux hélices aériennes une vitesse périphérique supérieure à 300 m /sec.

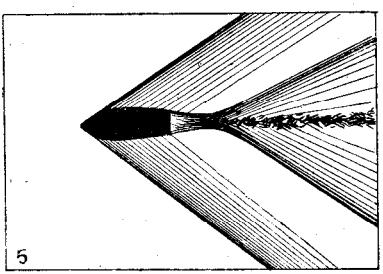


FIG. 5.

Dans l'eau, par contre, c'est plutôt la cavitation qui limite la vitesse.

Des phénomènes identiques se produisent dans l'écou-

lement à travers une conduite. Il existe deux régimes : le régime de Poiseuille se produit pour $\frac{VD}{\nu}$ (D = diamètre de la conduite) inférieur à une certaine limite qui dépend de la rugosité des parois, l'autre, dit régime turbulent, n'est plus un écoulement permanent.

Le type d'écoulement le plus intéressant en pratique est donné par la figure (1). Si l'on veut le réaliser pour des vitesses d'un ordre de grandeur courant, on est obligé de fuseler le profil du solide, ce qui a pour effet d'élever considérablement la première valeur critique du nombre de Reynolds.

Pour un profil portant et dans les limites d'utilisation, la fonction φ est sensiblement indépendante de $\frac{VD}{\nu}$ pour une même incidence.

La courbe indiquant la projection de φ sur un axe perpendiculaire à la vitesse (portance) en fonction de la projection de φ sur la vitesse (traînée) pour une incidence variable est une caractéristique de la surface portante (courbe polaire de l'aile) : elle peut être graduée en incidences. L'allure générale de ces courbes donne un maximum pour la portance au voisinage d'une incidence de 15°, puis elle tombe rapidement avec apparition de décollement de la veine au dos de l'aile. Nous verrons plus loin comment la théorie de la couche limite indique le remède à cet inconvénient. En ce qui concerne l'expression des forces intérieures, l'expérience semble montrer que l'usage d'un coefficient unique (coefficient de viscosité) et d'une loi linéaire simple ne peut rendre compte exactement de tous les phénomènes. Au voisinage des parois notamment, la cohésion joue un rôle

(1) Ces chiffres dépendent de la nature physique des parois. En toute rigueur la théorie de la similitude ne s'applique que si leurs aspérités sont dans le même rapport que les dimensions macroscopiques.

prépondérant et il est fort probable que dans cette région les propriétés physiques du fluide ne sont pas les mêmes qu'ailleurs.

Des expériences faites aux rayons X sur les lubrifiants et sur certains corps organiques ont montré que leurs molécules tendent à s'orienter dans la couche de contact, en piles superposées glissant facilement les unes sur les autres.

On sait depuis longtemps qu'une différence de potentiel entre deux corps modifie la tension superficielle de la couche de contact ; la théorie électronique attribue cela à la présence d'électrons. Il est donc probable que l'électricité pourrait aussi intervenir dans la résistance des fluides, en modifiant dans un sens ou dans l'autre la structure de la couche de contact. L'influence de celle-ci est capitale ; elle seule détermine le type d'écoulement. La cohésion paraît encore jouer un rôle, d'ailleurs moins important, au sein même des fluides.

En effet, un régime donné peut se maintenir au delà de la valeur critique de $\frac{VD}{\nu}$; le mouvement est alors instable, le régime peut changer spontanément pour reprendre le type stable correspondant à la valeur atteinte par le nombre de Reynolds. Pour un liquide ce phénomène peut s'expliquer de la manière suivante : Lorsque $\frac{VD}{\nu}$ croît dans un régime donné, il arrive un moment où la pression passe par zéro en certains points et même devient négative ; ceci est possible dans un liquide, grâce à la cohésion. On rencontre parfois l'opinion qu'une cavitation prend naissance par évaporation en tout point où la pression égale la tension de vapeur ; la cohésion ne pourrait donc jamais entrer en jeu. Mais parler de tension de vapeur au sein d'un fluide est dépourvu de sens physique si l'on n'y suppose pas la présence d'une cavité de rayon déterminé. Or il est bien connu que la tension

de vapeur y diminue avec le rayon, il est même certain qu'à partir des dimensions d'ordre moléculaire la cavité doit avoir une tendance à se fermer brusquement par attraction capillaire ou directe des parois. Ceci met en relief le caractère instable des pressions négatives, puisqu'une cavitation très petite mais suffisante pour vaincre la cohésion engendre une tension de vapeur qui accentue le phénomène. Des effets d'instabilité se rencontrent aussi bien pour le mouvement d'un gaz. Donc, si l'explication vaut probablement dans certains cas, elle n'est nullement générale.

D'ailleurs, viscosité et cohésion ne sont évidemment que deux effets d'une même cause, les actions intermoléculaires.

Dans les gaz la cohésion est nulle. Le fait que la viscosité d'un gaz croît avec la température alors que le contraire a lieu pour un liquide manifeste une différence essentielle entre les deux modes d'actions intermoléculaires. La théorie cinétique des gaz donne l'explication bien connue de leur viscosité par l'échange des quantités de mouvement d'une molécule à l'autre, échange d'autant plus facile que l'agitation thermique est grande.

Pour un liquide on pourrait apparemment donner sous forme simplifiée l'explication suivante. Supposons-le constitué d'un réseau où les molécules passent à peu près librement d'un nœud à l'autre. Par suite de la cohésion, ce mouvement n'est pas absolument libre. Si l'un des plans réticulaires subit un effort tangentiel dépassant les forces, d'ailleurs très faibles, de cohésion, il se met à glisser. De ce fait les molécules les plus proches, soumises à un champ alternatif, entrent en vibration, à leur tour elles agissent sur leurs voisines, et l'action se transmet de proche en proche. Cet accroissement de l'énergie cinétique des molécules se traduit physiquement par une augmentation de température, et une résistance à l'avancement du plan réticulaire moteur.

Si la température du fluide augmente, l'amplitude des vibrations des molécules autour de la position d'équilibre grandit. Cela revient à dire que le champ s'uniformise dans l'espace d'autant plus que la température augmente. On voit dès lors que le déplacement d'un plan réticulaire quelconque entraîne une perturbation moindre des molécules voisines : l'énergie transmise et par conséquent la viscosité diminuent. Il serait intéressant de soumettre cette hypothèse à l'analyse mathématique.

La théorie de la portance

Les théories les plus importantes pour les applications sont celles de la portance et de la couche limite.

Supposons que le mouvement d'un fluide parfait incompressible entourant une surface cylindrique indéfinie soit plan et irrotationnel dans tout l'espace fluide, mais que le potentiel des vitesses ne soit plus uniforme, en d'autres termes, que la circulation Γ de la vitesse sur un contour fermé entourant le solide ne soit pas nulle. Alors, si le courant à l'infini est uniforme de vitesse horizontale V, le cylindre subit par unité de longueur une poussée verticale

$$F = \rho V \Gamma$$

où ρ est la masse spécifique du fluide, et telle que le sens de rotation le plus court de V vers F soit l'inverse de celui pour lequel Γ est positif. D'une manière plus intuitive, Γ représente l'intensité d'un tourbillon qui existe autour du cylindre et qui détermine une portance dont la direction s'obtient en faisant tourner V de 90° dans le sens inverse du tourbillon.

C'est le théorème de Kutta-Joukowski. Sa vérification expérimentale est immédiate et conduit à l'explication du « phénomène de Magnus » qui concerne la poussée

perpendiculaire subie par un cylindre circulaire tournant dans un courant.

Donnons une idée de l'ordre de grandeur de cette poussée ; soit un cylindre de 30 cm de diamètre plongé dans un vent de 100 km/h et tournant à 3000 t/min. Si l'air était parfaitement entraîné dans la rotation, la poussée subie perpendiculairement à la vitesse du vent serait de 323 kg par mètre courant. En réalité, l'entraînement de l'air n'étant pas complet, ce résultat doit être réduit de moitié environ.

Cette théorie reçoit sa pleine confirmation dans l'étude des profils à force portante tels que les ailes d'avion. Le caractère fuselé du profil, avec un arrondi au bord d'attaque et une arête vive au bord de fuite, en même temps que son caractère dissymétrique engendre un potentiel non uniforme autour de l'aile. Il a d'ailleurs été dit plus haut que dans ces conditions pour des incidences généralement inférieures à 15° aucun décollement ne se produit et les filets fluides enveloppent entièrement l'aile. Montrons que ce type d'écoulement révélé par l'expérience suppose la création d'un tourbillon autour de l'aile. Considérons sur la figure (6) les lignes

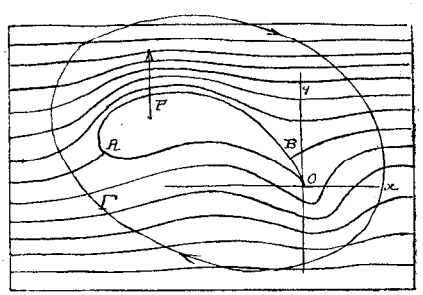


FIG. 6.

de courant pour une certaine incidence. Il existe un point au dos de l'aile où la vitesse du fluide est nulle, les filets ayant parcouru l'extrados et l'intrados s'y

rejoignent ; mais, ce dernier filet devant contourner la pointe en 0, le fluide devrait y atteindre une vitesse infinie. On ne peut éviter cette impossibilité physique qu'en supposant l'existence d'un tourbillon d'intensité Γ telle que le point B de bifurcation des filets vienne précisément se confondre avec la pointe 0 du profil. En vertu du théorème de Kutta-Joukowski, cette circulation crée la portance. Comme cette portance est la seule action exercée par le fluide sur l'aile et qu'elle est rigoureusement perpendiculaire à la vitesse, la résistance à l'avancement ou « traînée » est nulle. Écartons immédiatement des objections que l'on peut faire ; remarquons que l'aile est supposée infiniment longue et qu'on néglige le frottement dû à la viscosité. En outre, on suppose le régime permanent, le tourbillon se formant pendant la période de démarrage, grâce précisément à la viscosité et à l'influence de la pointe. Si l'on calcule la force vive totale communiquée au fluide par le tourbillon, on trouve une valeur infinie. Ce n'est nullement contradictoire, si l'on tient compte de ce que le tourbillon qui se crée pendant le régime transitoire dure un temps théoriquement infini pendant lequel la résistance à l'avancement n'est pas nulle. Le mécanisme de la portance due au tourbillon peut s'envisager de deux manières. On peut dire qu'au voisinage du solide le fluide subit une variation de quantité de mouvement du haut vers le bas, dont la contre-partie est nécessairement une poussée verticale sur l'obstacle ; ou bien encore que la vitesse due au tourbillon et celle de translation du fluide s'ajoutent à l'extrados et se retranchent à l'intrados. Comme la dépression est proportionnelle à l'accroissement du carré de la vitesse, c'est surtout la dépression créée à l'extrados et la succion qu'elle engendre qui déterminent la portance.

L'aile finie

Cette théorie de l'aile infinie donne lieu à celle de l'aile finie de Prandtl, qui sert actuellement de base solide au calcul aérodynamique des avions. Prandtl admet qu'autour de l'aile finie la circulation détermine sa portance. Mais il suffit d'appliquer le théorème de Stokes pour se rendre compte que le phénomène prend un aspect différent du précédent. Considérons en effet l'aile finie (fig. 7). Le mouvement dans le plan de symé-

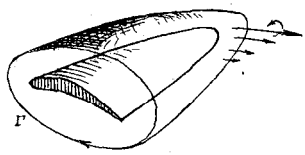


Fig. 7.

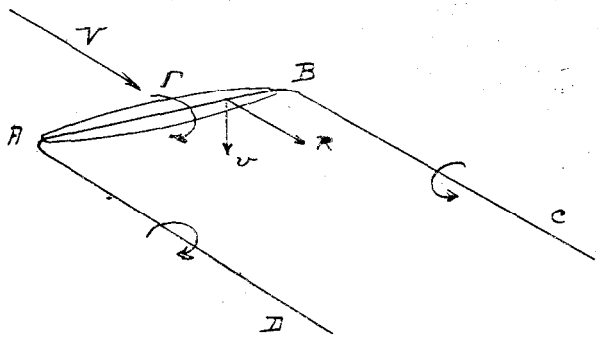
trie de l'aile est un mouvement plan. Soit Γ la circulation dans ce plan.

Si nous appuyons sur le contour une surface enveloppant une extrémité de l'aile, le flux des tourbillons à travers cette surface doit valoir 1/2 Γ. Il se crée particulièrement aux extrémités une nappe de tourbillons, dont l'énergie cinétique nécessite l'existence d'une résistance à l'avancement. Cette nouvelle résistance, s'ajoutant à celle de viscosité, porte le nom de « traînée induite ».

Ceci fait immédiatement ressortir l'avantage d'une aile de grande envergure.

Supposons en effet que sans changer le profil de la section nous augmentions la surface de l'aile, la circulation restera constante et, comme c'est elle qui détermine en fin de compte l'intensité des tourbillons dans le sillage, la résistance à l'avancement reste la même. Par contre, la portance sera augmentée sensiblement comme la surface. Au point de vue « finesse » d'une

surface portante, on a donc intérêt à construire des ailes monoplanes de grande envergure. A égalité de portance, le biplan possède une résistance plus que double de celle du monoplan. Aussi tend-il à disparaître pour les avions commerciaux, où l'économie de combustible joue le rôle essentiel. Par contre le biplan se maintient pour l'aviation militaire, en raison de sa plus grande maniabilité et de sa moindre vulnérabilité, dues à sa forme ramassée. On pourrait évidemment calculer la traînée en évaluant la force vive laissée dans le sillage, mais il est plus commode d'utiliser directement le théorème de Kutta-Joukowski. Pour simplifier, nous supposerons que l'aile est réduite à un tourbillon portant AB (fig. 8)



se prolongeant dans le sillage sous forme de deux tourbillons. La loi de Biot et Savart permet de calculer la vitesse due à un tube tourbillon. Les tubes BC et AD créent en un point quelconque de AB une composante v de la vitesse dirigée vers le bas. Si Γ est la valeur de la circulation en ce point, il se crée en vertu du théorème de Kutta-Joukowski une action $R = \rho\Gamma v$ s'opposant à l'avancement de l'aile. Il suffit pour connaître la résistance totale de faire la somme de ces actions pour l'aile entière.

On aura remarqué que ce calcul, d'ailleurs suffisant

pour la pratique, ne constitue qu'une première approximation ; il suppose v petit devant V.

Par le même procédé on peut facilement calculer la résistance d'induction mutuelle de deux surfaces portantes voisines. Dans le cas du biplan, à la vitesse v pour l'aile inférieure s'ajoute une contribution v' de l'aile supérieure qui accroît la résistance induite. Il s'ensuit qu'à égalité de portance une aile biplane présente une résistance plus que double de celle d'une aile monoplane.

D'après la théorie de Prandtl le coefficient de portance, C_z, est lié à la traînée induite C_{xi} par la relation

$$C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi\lambda}$$

où λ représente l'« allongement » de l'aile, c'est-à-dire le rapport de l'envergure à la profondeur médiane. La formule suppose en outre que la répartition de la portance le long de l'aile est elliptique ; à égalité de portance, cette répartition donne précisément le minimum de traînée. La différence de la traînée totale et de la traînée induite s'appelle « traînée de profil ». Sensiblement constante jusqu'à l'incidence de décollement, elle augmente ensuite de manière brusque. Ce coefficient paraît refléter l'influence du frottement de l'air sur les parois de l'aile et la structure de la couche limite ; il est sensiblement indépendant de l'allongement et caractérise la forme du profil. Grâce à la formule de Prandtl, il suffit d'avoir calculé une fois pour toutes la traînée de profil C_{xp} pour connaître la traînée totale C_x d'une aile de même profil mais d'allongement quelconque, λ, par la formule (1)

$$C_x = C_{xp} + \frac{C_z^2}{K\pi\lambda}$$

(1) Les coefficients C ne sont pas autre chose que les projections de la fonction φ envisagée plus haut dans la loi de similitude et sont donc indépendants des unités de mesure.

Cz est la portance, K est un coefficient qui tient compte de la forme en plan de l'aile ; maximum et égal à *un* lorsqu'elle est elliptique.

La polaire est donc pratiquement une parabole jusqu'aux incidences voisines de 15°, où C_x passe par un maximum.

On conçoit que ce maximum joue un rôle important dans la technique aéronautique, car il entraîne une sorte d'instabilité de la sustentation qui peut causer divers accidents classiques et notamment la vrille. C'est lui aussi qui détermine la vitesse d'atterrissage.

Nous avons considéré comme donnée la circulation en chaque section de l'aile. En première approximation on peut supposer que le mouvement dans un plan normal à l'aile satisfait à l'équation de Laplace. Dès lors la détermination du potentiel polytrope autour du profil ressortit à la théorie des fonctions analytiques de variables complexes. La méthode classique consiste à partir du potentiel des vitesses autour d'un cercle dans un courant uniforme avec circulation. Il suffit alors d'opérer sur le cercle une transformation conforme de façon à obtenir un profil à pointe se rapprochant de celui de l'aile, pour trouver le potentiel des vitesses correspondant et, partant, la circulation.

La découverte de la résistance induite, si féconde en résultats comparée aux tâtonnements de l'empirisme dont on dut pendant longtemps se contenter, constitue une preuve éclatante de l'insuffisance des méthodes purement expérimentales, même les plus perfectionnées, lorsqu'elles ne sont pas systématisées par une théorie.

Théorie de la couche limite

En 1904 Prandtl aborda pour la première fois l'étude des fluides visqueux en tenant compte des termes d'iner-

tie, suivant une voie principalement expérimentale. Il fut bientôt amené à formuler les lois du mouvement au voisinage des parois solides.

Une des premières solutions analytiques des équations de la couche limite fut donnée en 1908 par Blasius.

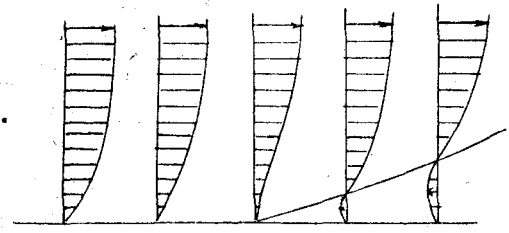


fig. 9

Cette théorie maintient l'existence d'un potentiel des vitesses jusqu'au voisinage immédiat de la paroi solide où règne une zone de transition, la vitesse diminuant rapidement, pour s'annuler au contact de la paroi. La viscosité y joue un rôle prépondérant. C'est à cette couche que sont dus le décollement des filets fluides et la formation des sillages tourbillonnaires.

Lorsqu'un fluide contourne un obstacle, la vitesse augmente au voisinage du solide, passe par un maximum puis diminue. Corrélativement la pression varie en sens inverse et passe par un minimum. Or dans la couche limite le fluide est fortement freiné et perd de son énergie ; dès que la pression au lieu de décroître commence à croître, l'énergie cinétique du filet fluide n'est plus suffisante pour lui permettre de continuer sa route au contact de la surface de l'obstacle, il s'en écarte et décolle. Cette même pression refoule d'aval en amont une certaine portion du fluide, créant ainsi au contact de la paroi aval un mouvement de sens inverse de celui des autres régions. Ceci est illustré par la figure (9). Cette figure indique la répartition des vitesses dans la couche limite.

On a fait de cette théorie des applications très inté-

ressantes aux diffuseurs et aux surfaces portantes en modifiant artificiellement le décollement et même en le supprimant. C'est le décollement à l'incidence critique, voisine de 15°, qui limite la portance maxima d'une aile. Or, il est très important de disposer d'une portance aussi grande que possible afin de permettre de réduire sans danger la vitesse d'atterrissage. L'invention de l'aile à fente a permis d'atteindre sans décollement des incidences de 25° et de doubler la portance maxima. Pour éviter le décollement il suffit d'insuffler de l'air dans la couche limite ou de l'aspirer dans la direction du mouvement de manière à rendre au fluide l'énergie cinétique perdue dans cette région par viscosité. Une fente convenablement placée (fig. 10) ménagée

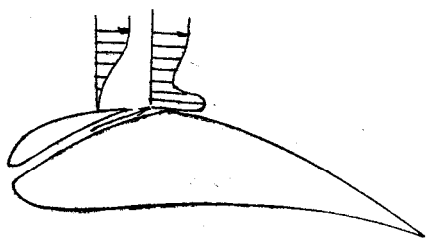


fig. 10

dans l'aile amène automatiquement l'air de l'intrados vers l'extrados (1).

Il est fort probable que cette belle théorie nous ménage encore quelques surprises dans ses nombreuses applications. La petitesse relative de la cause qui détermine les différents régimes d'écoulement nous permet d'espérer qu'un jour des moyens très simples permettront de créer à volonté tel régime demandé pour les applications

(1) Au concours de Cuggenheim (Mitchel Field. U. S. A. 31 octobre 1929) un biplan muni d'ailes à fentes et capable de réaliser les performances habituelles des avions de son type est parvenu à réduire sa vitesse d'atterrissage à 32 km/h.

techniques. Pour les liquides, où le mécanisme de la couche limite relève dans certains cas de la physico-chimie, une théorie purement mécanique paraît actuellement insuffisante.

« Etablissements F. CEUTERICK », 60, rue Vital Decoster, Louvain.