ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

EXTRAIT

Propriété générale des systèmes élastiques soumis à impulsion transitoire

Sur les extrêmes de la pression dans un fluide incompressible

Notes de M. MAURICE BIOT

LOUVAIN
Secrétariat de la Société Scientifique
2, RUE DU MANÈGE, 2
Chèques postaux 202746

PARIS
Les Presses Universitaires de France
49, BOULEVARD S^t MICHEL, 49
Compte chèques postaux 392-33

1932

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*
Tome LII, série B, première partie. *Comptes rendus des séances*, p. 49.
Session du 12 avril 1932. Deuxième section.

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES SYSTÈMES ÉLASTIQUES SOUMIS A IMPULSION TRANSITOIRE

Note de M. Maurice Biot, *Ph. D.*
Fellow of the C. R. B. Educational Foundation

Nous appelons système élastique tout système où les forces sont conservatives et dont l'énergie potentielle est une fonction quadratique définie positive des paramètres en nombre fini ou infini qui déterminent univoquement la position du système.

Tout système à forces conservatives jouit en général de cette propriété dans le voisinage d'un point d'équilibre stable. De tels systèmes obéissent au théorème de réciprocité ; les relations entre les forces et les déplacements sont linéaires.

Considérons un système continu ; une force de volume (X, Y, Z) appliquée au point $(x'y'z')$ détermine au point (xyz) un déplacement $(\xi\eta\zeta)$

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha_{11}X + \alpha_{12}Y + \alpha_{13}Z\,,\\
\eta &= \alpha_{21}X + \alpha_{22}Y + \alpha_{23}Z\,,\\
\zeta &= \alpha_{31}X + \alpha_{32}Y + \alpha_{33}Z\,.
\end{aligned}$$

Si les forces appliquées sont harmoniques de même pulsation et de même phase, les déplacements jouissent également de cette propriété. En tenant compte des forces d'inertie, la force de volume s'écrit

$$X = X' \sin \omega t + \omega^2 \rho \xi \sin \omega t.$$

D'où les trois équations intégrales du type

$$\xi = \omega^2 \iiint \rho(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13}\zeta)\,dx'dy'dz' + \iiint (\alpha_{11}X' + \alpha_{12}Y' + \alpha_{13}Z')\,dx'dy'dz'.$$

Pour simplifier les notations, limitons-nous au cas d'une seule coordonnée de déplacement u

$$u(x) = \omega^2 \int_a^b \rho(t)\,\alpha(xt)\,u(t)\,dt + \int_a^b \alpha(xt)\,f(t)\,dt.$$

En vertu du théorème de réciprocité : $\alpha(xt) = \alpha(tx)$.

Considérons l'équation homogène qui correspond aux oscillations libres du système

$$u(x) = \omega^2 \int_a^b \rho(t)\,\alpha(xt)\,u(t)\,dt.$$

Son noyau $\rho(t)\,\alpha(xt)$ est symétrisable par le changement de variable

$$y(x) = \sqrt{\rho(x)}\,u(x).$$

Il vient

$$y(x) = \omega^2 \int_a^b \alpha(xt)\sqrt{\rho(x)\,\rho(t)}\,y(t)\,dt.$$

Une telle équation possède une infinité de valeurs caractéristiques positives du paramètre ω^2, comme il découle de l'hypothèse de la stabilité de l'équilibre.

En vertu du théorème d'Hilbert-Schmidt, la solution de l'équation non homogène

$$(1) \qquad y(x) = \omega^2 \int_a^b \alpha(xt)\sqrt{\rho(x)\,\rho(t)}\,y(t)\,dt + \int_a^b \sqrt{\rho(x)}\,\alpha(xt)\,f(t)\,dt$$

peut se développer en série absolument et uniformément convergente de fonctions caractéristiques

$$y = \Sigma A_i y_i.$$

Substituant dans l'équation (1), il vient

$$\Sigma A_i y_i = \Sigma \frac{\omega^2}{\omega_i^2} A_i y_i + \int_a^b \sqrt{\rho(x)}\,\alpha(xt)\,f(t)\,dt.$$

Multiplions les deux membres par y_i et intégrons, en tenant compte de l'orthogonalité des fonctions caractéristiques

$$A_i[\omega_i^2 - \omega^2] \int_a^b y_i^2\,dx = \omega_i^2 \int_a^b \int_a^b y_i(x)\sqrt{\rho(x)}\,\alpha(xt)\,f(t)\,dt\,dx,$$

d'où, pour les valeurs des coefficients de la série

$$A_i = \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \qquad C_i = \frac{\int_a^b u_i(t)\,f(t)\,dt}{\int_a^b \rho u_i^2\,dt}.$$

Et la solution cherchée prend la forme très caractéristique

$$u(x) = \Sigma \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2} u_i(x) .$$

Une impulsion harmonique B $f(x) e^{i\omega t}$ engendre une vibration harmonique

$$v(xt) = B e^{i\omega t} \Sigma \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2} u_i(x) .$$

Proposons-nous maintenant de trouver la solution correspondant à la sollicitation constante $f(x)$ brusquement appliquée à l'origine des temps. Considérons à cet effet l'intégrale prise le long de l'axe réel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & t > 0 , \\ 0 & t \leqslant 0 . \end{cases}$$

La solution cherchée est alors

$$z(xt) = \Sigma C_i u_i(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega(\omega_i^2 - \omega^2)} d\omega .$$

La méthode des résidus permet d'évaluer immédiatement cette intégrale

$$z(xt) = \Sigma \frac{C_i}{\omega_i^2} u_i(x) [1 - \cos \omega_i t] .$$

Il est intéressant de noter l'ordre de grandeur des coefficients C ; on voit aisément que si la dérivée $f'(x)$ est bornée, ces coefficients sont de l'ordre de $\frac{1}{\omega_i^2}$, car les fonctions fondamentales u_i sont asymptotiques aux termes d'une série trigonométrique de Fourier. On peut donc poser $C_i = \frac{B_i}{\omega_i^2}$ où B_i est borné, et

$$z(xt) = \Sigma \frac{B_i}{\omega_i^4} u_i(x) [1 - \cos \omega_i t].$$

Les ω_i étant de l'ordre des nombres entiers consécutifs, cette série a en général une convergence extrêmement rapide.

Si l'impulsion appliquée au système est variable avec le temps de la forme $f(x) \psi(t)$, la solution correspond à la somme des solutions des impulsions élémentaires

$$f(x) \frac{d\psi(t)}{dt} dt , \qquad [\psi(o) = 0] ,$$

et s'exprime

$$w(xt) = \int_o^t z [x, t - \tau] \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} d\tau ,$$

ou

$$\omega(xt) = \int_o^t \frac{\partial}{\partial t}[z(x, t - \tau)]\, \psi(\tau)\, d\tau.$$

Posons, pour simplifier les écritures, $\frac{B_i}{\omega_i^4} u_i(x) = K_i(x)$.

La formule précédente s'écrit

$$(2) \qquad \omega(xt) = \Sigma\, K_i(x) \cos \omega_i t \int_o^t \sin \omega_i \tau\, \psi(\tau)\, d\tau$$
$$- \Sigma\, K_i(x) \sin \omega_i t \int_o^t \cos \omega_i \tau\, \psi(\tau)\, d\tau.$$

Ce résultat se généralise facilement au cas où la sollicitation est quelconque $f(xt)$.

L'intégrale de la formule précédente s'interprète physiquement par la considération de l'intégrale de Fourier

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi}\int_o^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \cos \omega(\tau - t)\, d\tau$$
$$= \int_o^\infty d\omega \cos \omega t \,.\, \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau + \int_o^\infty d\omega \sin \omega t \,.\, \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \sin \omega\tau\, d\tau$$

Posant

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau\,,$$
$$f_2(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \sin \omega\tau\, d\tau\,,$$

il vient

$$\psi(t) = \int_o^\infty f_1(\omega) \cos \omega t\, d\omega + \int_o^\infty f_2(\omega) \sin \omega t\, d\omega\,.$$

L'« intensité spectrale » de l'onde incidente $\psi(\tau)$ est donnée par

$$\delta(\omega) = f_1^2 + f_2^2.$$

On voit d'après (2) que l'amplitude de chacun des modes normaux est

$$\pi\, K_i(x) \sqrt{\delta(\omega_i)}$$

et leurs énergies sont proportionnelles à

$$\omega_i^2 \int_a^b K_i(x)\, dx \,.\, \delta(\omega_i).$$

En d'autres termes, lorsqu'une sollicitation quelconque agit sur un système élastique, chacun des modes normaux de pulsation ω_i recueille une énergie proportionnelle au produit d'un facteur caractéristique du mode normal et de la distribution spatiale de la sollicitation, par l'intensité spectrale de la sollicitation au point ω_i. Ce résultat montre également que l'énergie captée par chacun des modes normaux est de l'ordre de $\frac{\delta(\omega_i)}{\omega_i^6}$.

Si la densité de fréquence du système est $\nu(\omega_i)$, la densité de l'énergie captée est de l'ordre de $\frac{\nu(\omega_i)\,\delta(\omega_i)}{\omega_i^6}$.

La méthode est susceptible d'applications intéressantes. Elle permet par exemple d'étudier très simplement l'effet d'un train d'onde sinusoïdal de longueur finie T sur un système complexe. L'intensité spectrale a dans ce cas très approximativement la forme

$$\left[\frac{\sin T(\omega - \omega_k)}{\omega - \omega_k}\right]^2.$$

Elle a d'ailleurs été appliquée par l'auteur dans une étude [1] de l'action des séismes sur les bâtiments à ossature élastique, ainsi qu'au calcul des amplitudes prises par un arbre en rotation lorsqu'on traverse une vitesse critique avec une accélération angulaire donnée.