Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*
Tome LIII, série B, première partie, *Comptes rendus des séances*, p. 189
Session du 26 octobre 1933. Deuxième Section.

LE PROBLÈME DE LA FLEXION D'UNE POUTRE SUR FONDATION ÉLASTIQUE

Note de M. M. Biot

1. *Généralités et théorie classique.* — En résistance des matériaux, ce problème classique est traité en remplaçant la fondation élastique par une infinité de ressorts infiniment petits de rigidité telle, qu'une déflexion η de cette fondation fictive nécessite une force $f = k\eta$ par unité de longueur. Le coefficient k est appelé « module de la fondation ». L'équation de l'élastique de flexion d'une poutre de moment d'inertie I et de module d'élasticité E_p soumise à une force normale par unité de longueur est alors

$$E_p I \frac{d^4\eta}{dx^4} + k\eta = p. \qquad (1)$$

Dans le cas d'une poutre infiniment longue soumise à une charge concentrée P, cette théorie donne pour valeur du moment fléchissant maximum au droit de la force P,

$$M_{\max} = \frac{P}{4}\left(\frac{4\,E_p I}{k}\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (2)$$

Nous montrerons dans cette Note que l'on peut traiter exactement le problème d'une poutre infiniment longue sur fondation élastique à deux dimensions (plaque) par l'application de l'intégrale de Fourier sans introduire de ressorts fictifs, et que le résultat conduit à une formule différente de la formule classique (2).

2. *Fondation élastique à deux dimensions sous une distribution sinusoïdale des pressions normales à la surface.* — La fondation élastique est supposée infiniment étendue en longueur et en profondeur, sa largeur est limitée à celle de la poutre. Le problème des tensions dans la fondation est ainsi un problème à deux dimensions. L'axe des x est à la surface de la fondation, et les ordonnées y sont positives vers la profondeur. Lorsqu'on applique à la surface de cette fondation des forces normales f par unité de longueur suivant la loi sinusoïdale

$$f = f_0 \cos \lambda x, \tag{3}$$

la déflexion doit être sinusoïdale de même longueur d'onde

$$\eta = \eta_0 \cos \lambda x .$$

Il s'agit de trouver η_0 en fonction de f_0 et λ.

Il suffit pour cela de considérer la fonction d'Airy F solution de l'équation

$$\Delta\Delta F = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot$$

Les tensions

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

correspondant à cette fonction doivent satisfaire aux conditions aux limites d'être nulles à l'infini en profondeur, d'avoir une composante τ de cisaillement nulle à la surface, et une tension normale $f = -b\sigma_y$ (b largeur de la fondation et de la poutre).

On voit facilement que la fonction d'Airy satisfaisant à ces conditions est

$$F = \frac{f_0}{t\lambda^2} \cos \lambda x \, e^{-\lambda y} (1 + \lambda y) .$$

Le déplacement vertical correspondant de la surface de la fondation est

$$\eta = \frac{2 f_0}{E b \lambda} \cos \lambda x , \tag{4}$$

où E représente le module d'élasticité de la fondation. Comparant (3) et (4), on en tire la relation

$$f = k\eta,$$

avec

$$k = \frac{1}{2} E b\lambda. \tag{5}$$

Ainsi donc, *lorsque la distribution des pressions sur une fondation élastique est sinusoïdale, celle-ci se comporte comme les ressorts de la théorie classique, toutefois le module* k *de la fondation fictive dépend de la longueur d'onde* $\frac{2\pi}{\lambda}$ *de la courbe de répartition des pressions.*

Les ressorts équivalents deviennent d'autant plus rigides que la longueur d'onde est plus courte. Il ne sera donc pas légitime, en général, de remplacer la fondation réelle par une fondation fictive de module déterminé, puisque celui-ci varie avec la longueur d'onde.

3. *Poutre sur fondation élastique avec charge concentrée.* — Supposons qu'une pression sinusoïdale p par unité de longueur agisse sur la poutre,

$$p = p_o \cos \lambda x;$$

la déflexion du sol est aussi sinusoïdale et, en vertu du résultat acquis au paragraphe précédent, une déflexion η du sol correspond à une réaction de celui-ci

$$f = k\eta\,,$$

ou

$$k = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,b\lambda.$$

On peut appliquer la formule (1) de la théorie classique, ce qui donne pour la déflexion de la fondation

$$\eta = \frac{p_o}{\mathrm{E}_p \mathrm{I}\,\lambda^4 + \frac{1}{2}\mathrm{E}\,b\lambda} \cos \lambda x\,.$$

Le moment fléchissant vaut

$$\mathrm{M} = -\,\mathrm{E}_p \mathrm{I}\,\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{p_o\lambda}{\lambda^3 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{E}b}{\mathrm{E}_p\mathrm{I}}} \cos \lambda x\,. \tag{6}$$

Si la répartition de la charge $p(x)$ n'est pas sinusoïdale, on peut la représenter par l'intégrale de Fourier

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\int_o^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) \cos \lambda\,(x - \xi)\,d\xi\,.$$

Le moment fléchissant se calcule alors par l'application de la formule (6) et du principe de superposition

$$\mathrm{M}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)\,d\xi \int_o^{\infty} \frac{d\lambda}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^3 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{E}b}{\mathrm{E}_p\mathrm{I}}} \cos \lambda\,(x - \xi).$$

Pour une force concentrée à l'origine ($x = 0$), $\mathrm{P} = p(\xi)\,d\xi$, la valeur du moment $\mathrm{M}(o) = \mathrm{M}_{\max}$ maximum à l'origine, est

$$\mathrm{M}_{\max} = \int_o^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^3 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{E}b}{\mathrm{E}_p\mathrm{I}}}\,.$$

En résolvant cette intégrale,

$$M_{max} = 0.486\, P \left(\frac{I}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{E_p}{E}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{7}$$

Comparant cette formule avec celle (2) de la théorie classique, on remarque qu'elle est de nature toute différente. Le moment maximum est proportionnel à la puissance $^1/_3$ de la raideur $E_p I$ de la poutre, et non à la puissance $^1/_4$.