TRAINÉE INDUITE DE L'AILE EN DIÈDRE

Note de M. M. Biot

L'application de la loi de Biot et Savart au calcul de la traînée induite d'une aile présente la difficulté que l'intégration doit se faire à travers un pôle de la fonction sous le signe intégral. Pour l'aile droite, il a été établi par von Kàrmàn une formule basée sur l'intégrale de Fourier et qui évite cet inconvénient. Elle s'écrit :

$$F = \frac{\rho}{4\pi} \int_{o}^{\infty} \mu\, G^2(\mu)\, d\mu\ ,$$

avec

$$G(\mu) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(y) \cos \mu y\, dy\ ,$$

b envergure,
$\Gamma(y)$ circulation symétrique le long de l'envergure,
ρ masse spécifique du fluide.

Nous allons généraliser cette expression au cas d'une aile présentant un dièdre d'angle, 2α (fig. 1). Nous supposerons que la circulation présente

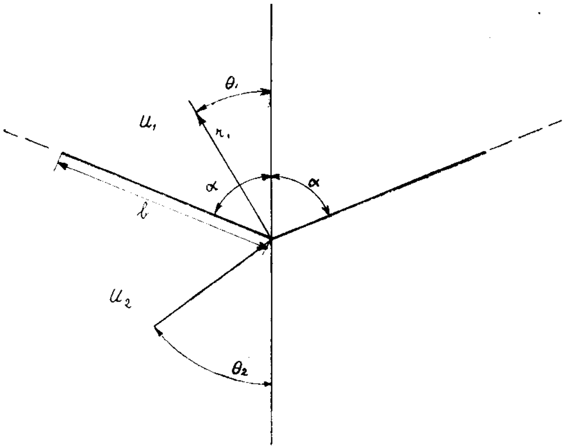

Fig. 1

En vertu de ce qui précède, une circulation $\Gamma(r)$, $\Gamma(r) = 0$, $r > b$ arbitraire, doit correspondre à un potentiel u_1 donné par une formule analogue

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ch}\,\omega\theta\,\mathrm{Sh}\,\omega(\pi-\alpha)d\omega}{\mathrm{Sh}\,\omega\pi}\Bigg[\int_0^b \Gamma(\rho)\cos(\omega\log r)\cos(\omega\log\rho)\frac{d\rho}{\rho}$$
$$+\int_0^b \Gamma(\rho)\sin(\omega\log r)\sin(\omega\log\rho)\frac{d\rho}{\rho}\Bigg].$$

L'application du théorème de Joukowski donne alors pour valeur de la résistance induite

$$F = \rho\int_0^b \Gamma(r)\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\theta_1}\right)_{\theta_1=\alpha} dr = \frac{\rho}{\pi}\int_0^\infty d\omega\,\varphi(\omega\alpha)\left[\int_0^b \Gamma(\rho)\cos(\omega\log\rho)\frac{d\rho}{\rho}\right]^2$$
$$+\frac{\rho}{\pi}\int_0^\infty d\omega\,\varphi(\omega\alpha)\left[\int_0^b \Gamma(\rho)\sin(\omega\log\rho)\frac{d\rho}{\rho}\right]^2$$

avec

$$\varphi(\omega\alpha) = \frac{\omega\,\mathrm{Sh}\,\omega\alpha\,\mathrm{Sh}\,\omega(\pi-\alpha)}{\mathrm{Sh}\,\omega\pi}.$$

Posons

$$G(\omega) = \int_0^b \Gamma(\rho)\cos(\omega\log\rho)\frac{d\rho}{\rho} = \int_{-\infty}^{\log b}\Gamma(e^\xi)\cos\omega\xi\,d\xi$$

$$H(\omega) = \int_0^b \Gamma(\rho)\sin(\omega\log\rho)\frac{d\rho}{\rho} = \int_{-\infty}^{\log b}\Gamma(e^\xi)\sin\omega\xi\,d\xi,$$

il vient finalement l'expression de la résistance induite totale

$$F = \frac{\rho}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\omega\alpha)\left[H^2(\omega) + G^2(\omega)\right]d\omega\,.$$

Cette formule montre que la traînée est maximum pour l'aile droite $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

Louvain. — Établissements Fr. Ceuterick, rue Vital Decoster, 66