ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

EXTRAIT

Propriété générale des tensions thermiques
en régime stationnaire
dans les corps cylindriques.
Application à la mesure photo-élastique
de ces tensions

Note de M. M. BIOT

LOUVAIN

Secretariat de la Société Scientifique

2, RUE DU MANÈGE, 2
Chèq. postaux 202746.

PARIS

Les Presses Universitaires de France

49, BOULEVARD S' MICHEL, 49
Compte chèques postaux 392-38

1934

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES TENSIONS THERMIQUES EN RÉGIME
 STATIONNAIRE DANS LES CORPS CYLINDRIQUES
 APPLICATION A LA MESURE PHOTO-ÉLASTIQUE DE CES TENSIONS

Note de M. M. BIOT, Delft-Louvain

CYLINDRE PLEIN.

Considérons un corps cylindrique plein, c'est-à-dire dont la section droite D constitue une aire simplement connexe, et supposons que la distribution des températures soit la même dans toutes les sections droites. On peut alors rapporter cette distribution plane des températures à des axes xy .

Au lieu de la température, nous considérerons la dilatation linéaire ϵ qui lui est proportionnelle. Le régime des températures est supposé stationnaire (indépendant du temps), de sorte qu'on a

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial y^2} = 0.$$

D'autre part, pour qu'il existe une déformation ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma$), il faut et il suffit, dans un domaine simplement connexe, que soit satisfaite la relation dite de compatibilité

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}.$$

On voit immédiatement qu'en vertu de (1) l'équation (2) est satisfaite par

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon, \quad \gamma = 0,$$

d'où le théorème :

Un cylindre plein présentant une répartition des températures, stationnaire la même dans toutes les sections droites, se dilate librement dans le plan de sa section droite.

Ce théorème vaut également pour une plaque; la dilatation de la plaque est entièrement libre.

Nous allons montrer que la rotation et les déplacements jouissent de certaines propriétés remarquables.

Désignons par ω la rotation élémentaire; on a les relations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega, \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \omega, \end{cases}$$

et aussi

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que la fonction complexe

$$Z(z) = \epsilon + i\omega \quad (z = x + yi)$$

est analytique et régulière dans le domaine D. On a

$$\Delta\omega = 0.$$

Les courbes

$$\epsilon = \text{cte, isothermes,}$$

$$\omega = \text{cte, isorotation,}$$

constituent un système isométrique.

La rotation ω jouit encore de la propriété suivante : si l'on trace une courbe entre deux points 1 et 2 du domaine, le flux de chaleur qui traverse cette courbe est proportionnel à la différence des rotations $\omega_2 - \omega_1$. En effet,

$$\omega_2 - \omega_1 = \int_1^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy,$$

et, en vertu des relations (5),

$$\omega_1 - \omega_2 = \int_1^2 -\frac{\partial \epsilon}{\partial y} dx + \frac{\partial \epsilon}{\partial x} dy.$$

L'intégrale de droite est proportionnelle au flux de chaleur passant de droite à gauche entre les points 1, 2.

On trouve facilement la variation de coordonnées (u, v) ou déplacement de chaque point, car $u + iv$ est une fonction analytique complexe de $z = x + yi$ donnée par

$$u + iv = \int Z dz = \int (\epsilon + i\omega) dz.$$

On a, en effet, en vertu de (3) et (4),

$$\begin{aligned} \int (\epsilon + i\omega) dz &= \int \epsilon dx - \omega dy + i \int \epsilon dy + \omega dx \\ &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \int \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ &= u + iv. \end{aligned}$$

CYLINDRE CREUX.

Supposons que le domaine D de la section droite renferme plusieurs trous ; ce domaine est alors dit *multiplement connexe*. On sait qu'un tel domaine peut être rendu *simplement connexe* en y pratiquant un nombre de coupures égal au nombre de trous. Si ces coupures existent physiquement, alors en vertu du théorème précédent, le cylindre se dilate librement suivant sa section droite, toutefois les deux lèvres de chaque coupure s'entr'ouvrent et présentent un déplacement relatif. Pour que les tensions soient également nulles, ou encore, pour que la dilatation se fasse librement suivant la section droite lorsque les coupures n'existent pas physiquement, il faut que la distribution stationnaire des températures satisfasse à certaines conditions supplémentaires. Ces conditions sont que les valeurs de la rotation ω et des déplacements u et v qu'on déduit par intégration à partir des dilatations, reprennent la même valeur qu'au départ lorsqu'on parcourt un chemin d'intégration fermé autour d'un des trous.

1) Pour que la variation de rotation soit nulle ($\omega_2 - \omega_1 = 0$) lorsqu'on revient au point de départ, après avoir fait le tour du trou, il faut et il suffit que le flux de chaleur qui sort de chaque trou soit nul, car il s'identifie avec la variation de rotation $\omega_2 = \omega_1$, en vertu de ce qui a été démontré précédemment.

2) Pour que le déplacement relatif des deux lèvres de la coupure soit nul, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_c Z dz$$

prise le long d'un contour fermé autour de chaque trou soit nulle. Si l'on suppose la première condition satisfaite, c'est-à-dire que le flux de chaleur sortant du trou soit nul, la fonction Z est uniforme et l'intégrale ne dépend pas du contour, pourvu que le contour entoure toujours le même trou. La valeur de cette intégrale représente alors la **translation** relative des deux lèvres de la coupure. La condition pour que cette coupure soit nulle équivaut à deux conditions,

$$\int_c \epsilon dx - \omega dy = 0$$

$$\int_c \epsilon dy + \omega dx = 0,$$

d'où le théorème suivant :

Lorsque la répartition des températures est stationnaire et la même dans toutes les sections droites d'un cylindre creux, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le cylindre se dilate librement suivant sa

section droite (pas de tensions sauf dans les sections perpendiculaires aux génératrices) sont :

1) Le flux total de chaleur sortant de chaque cavité doit être nul.

2) Pour chaque trou l'intégrale $\int_c Z dz$ prise sur un contour qui l'entoure doit être nulle. Sous forme réelle la condition $\int_c Z dz = 0$ revient à

$$\int_c \epsilon dx - w dy = 0$$

$$\int_c \epsilon dy + w dx = 0.$$

Ce théorème vaut naturellement pour une plaque.

EXEMPLES :

1) Considérons un cylindre circulaire limité par deux cercles concentriques et une source de chaleur à l'origine. On a

$$Z = C \log z.$$

Le déplacement relatif des deux lèvres d'une coupure radiale est

$$u + iv = [Zz]_1^2 - \int \frac{dZ}{dz} Z dz$$

$$u + iv = [Zz]_1^2 = 2\pi i C (x + yi) = 2\pi C (x - yi).$$

C'est une rotation $2\pi C$ autour du centre.

2) Considérons le même cylindre avec un doublet de chaleur à l'origine

$$Z = \frac{C}{z}.$$

Dans ce cas le mouvement relatif des deux lèvres de la coupure est une translation

$$u + iv = \int_c Z dz = 2\pi i C.$$

3) En régime de température stationnaire dans un cylindre creux ne contenant pas de sources de chaleur, on fait disparaître les tensions thermiques dans les plans parallèles aux génératrices en remplissant les creux d'un liquide de même conductibilité thermique que le cylindre. En effet, dans ce cas la fonction Z est uniforme et l'intégrale $\int_c Z dz$ est nulle, car la fonction n'a pas de singularité à l'intérieur du contour.

APPLICATION A LA PHOTO-ÉLASTICITÉ.

Pour obtenir les tensions thermiques en régime stationnaire d'un corps cylindrique creux, il suffira de pratiquer des coupures de façon qu'il n'y

ait plus de région intérieure et extérieure et d'écarter les lèvres de chaque coupure en leur donnant les mêmes déplacements relatifs que ceux qu'elles prendraient si le corps subissait l'action des températures considérées. Les tensions ainsi produites sont égales et de signe contraire aux tensions thermiques. Ceci procure le moyen d'étudier ces tensions thermiques par la Photo-Élasticité.