

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

EXTRAIT

Sur la stabilité de l'équilibre élastique.
Équations de l'élasticité
d'un milieu soumis à tension initiale

Note de M. M. BIOT

LOUVAIN
Secrétariat de la Société Scientifique
2, RUE DU MANÈGE, 2
Chèq. postaux 202746.

PARIS
Les Presses Universitaires de France
49, BOULEVARD S' MICHEL, 49
Compte chèques postaux 392-33

SUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE ÉQUATIONS DE L'ÉLASTICITÉ D'UN MILIEU SOUMIS A TENSION INITIALE

Note de M. M. BIOT, Delft-Louvain

RÉSUMÉ. — On sait que les équations classiques de l'Élasticité ne permettent pas de déduire le phénomène de flambage ou d'instabilité. La note suivante montre dans quelles conditions, en partant de la loi d'Hooke et de considérations purement géométriques, il est possible de déduire pour un corps soumis à des tensions initiales des équations de l'Élasticité de forme suffisamment simple et qui permettent de prévoir les phénomènes d'instabilité.

La méthode d'établissement est analogue à celle de Trefftz, mais elle précise l'ordre d'approximation et de validité de cette méthode en introduisant dans l'expression de l'énergie potentielle la rotation ω . On remarque alors qu'à l'approximation considérée, c'est cette rotation qui joue le rôle prépondérant et qu'elle n'a de signification dans les équations que si on la suppose grande par rapport aux déformations. Celles-ci sont supposées telles que la loi d'Hooke reste vérifiée, mais l'ordre de grandeur élevé de ω introduit des termes quadratiques nouveaux dans l'expression de l'énergie potentielle. On en déduit les équations de l'Élasticité cherchées. Elles ont une forme différente de celles de Trefftz, mais à l'approximation mentionnée (loi d'Hooke et ω grand) elles leur sont équivalentes et montrent qu'elles s'interprètent aisément en termes de la Statique.

Pour simplifier, limitons-nous aux déformations à deux dimensions.

Donnons à un milieu élastique une déformation telle que les coordonnées x, y d'un point deviennent $x + u, y + v$. Le changement de longueur est donné par

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Posons,

$$g_{11} = 1 + 2\gamma_{11} = 1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 2\gamma_{12} = 2\gamma_{21} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$g_{22} = 1 + 2\gamma_{22} = 1 + 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Il vient,

$$ds^2 = (1 + 2\gamma_{11}) dx^2 + 4\gamma_{12} dx dy + (1 + 2\gamma_{22}) dy^2.$$

Supposons que les $\gamma_{\mu\nu}$ soient de l'ordre d'une quantité γ **petite du premier ordre**. Dans ce cas au second ordre près, c'est-à-dire avec une approximation de l'ordre de γ^2 , les allongements suivant les directions x, y initialement perpendiculaires, sont γ_{11}, γ_{22} , et le changement d'angle est γ_{12} .

Considérons maintenant un milieu sous les tensions initiales $\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{12} \bar{\sigma}_{22}$; donnons à ce milieu les déplacements u, v . L'élément rectangulaire $\bar{dx} \bar{dy}$ sur lequel agissaient les tensions $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$, devient un parallélogramme sur lequel agissent les mêmes tensions $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ parallèlement aux arêtes du parallélogramme, plus des tensions supplémentaires $\sigma_{\mu\nu}$ non nécessairement symétriques. Supposons maintenant qu'au second ordre près, c'est-à-dire avec une approximation de l'ordre de γ^2 , les tensions supplémentaires $\sigma_{\mu\nu}$ soient fonctions linéaires des $\gamma_{\mu\nu}$. Dans ce cas, avec une approximation d'un ordre à préciser, on peut écrire l'expression de l'énergie potentielle par unité de volume due aux déplacements u, v

$$W = \sum^{\mu\nu} \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} \bar{\sigma}_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}.$$

Cette expression ⁽¹⁾ de l'énergie potentielle est celle dont part Trefftz pour établir ses équations, mais il est important de noter qu'elle n'a de signification qu'à une approximation à préciser. Cet ordre d'approximation peut être exprimé comme suit : si nous appelons G une quantité de l'ordre des modules d'élasticité (coefficients qui figurent dans les relations linéaires entre les $\sigma_{\mu\nu}$ et les $\gamma_{\mu\nu}$) du milieu sous tension, et T une grandeur de l'ordre des $\sigma_{\mu\nu}$, alors le premier terme (en $\sigma_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$) dans l'expression de W présente une approximation de l'ordre de $G\gamma^3$.

Notons maintenant qu'on peut écrire

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} e_{11}^2 + \frac{1}{2} (e_{12} + \omega)^2 \\ \gamma_{12} &= e_{12} + \frac{1}{2} e_{11} (e_{12} - \omega) + \frac{1}{2} e_{22} (e_{12} + \omega) \\ \gamma_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2} e_{22}^2 + \frac{1}{2} (e_{12} - \omega)^2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

en posant

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \omega &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Remarquons que seule la partie symétrique du tenseur $\sigma_{\mu\nu}$ apparaît dans l'expression de l'énergie potentielle. Par la suite, $\sigma_{\mu\nu}$ désigne cette partie symétrique du tenseur.

Remarquons que la « rotation » ω intervient dans l'expression du tenseur déformation, parce que nous considérons l'expression complète de la déformation avec ses termes du second ordre et que d'autre part, ω ne représente une rotation pure qu'au second ordre près.

Comme nous allons le voir, c'est précisément cette rotation qui joue le rôle prépondérant dans les problèmes de stabilité de l'équilibre élastique. Supposons, en effet, que les grandeurs e_{11} , e_{12} , e_{22} , ω , soient toutes du même ordre γ que les $\gamma_{\mu\nu}$, les termes quadratiques dans la partie $\Sigma \bar{\sigma}_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$ de W n'ont pas de signification, car ils sont du même ordre que l'approximation même de l'expression de W . Mais, si $e_{11} e_{12} e_{22}$ doivent nécessairement être toujours de l'ordre γ des $\gamma_{\mu\nu}$, il n'en est pas de même de ω ; les expressions (1) montrent, en effet, que ω peut très bien être de l'ordre $\sqrt{\gamma}$, c'est-à-dire que la rotation ω peut être grande de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ par rapport aux déformations ($\gamma_{\mu\nu}$ ou $e_{11} e_{12} e_{22}$). Dans ces conditions, les termes quadratiques qui renferment ω ont une signification, car ces termes deviennent de l'ordre de $T\gamma$. C'est précisément ce qui se passe dans les cas d'instabilité de l'équilibre élastique (flambage). C'est un cas où, tout en conservant la loi d'Hooke, l'expression de l'énergie potentielle renferme d'autres termes quadratiques que les termes habituels, et dont l'obtention dépend de considérations d'ordre purement géométrique.

Analysons le phénomène d'une manière plus approfondie, en prenant la variation de l'énergie potentielle δW pour des variations arbitraires δu , δv . Il vient, avec les valeurs (1) pour les $\gamma_{\mu\nu}$ et, en tenant compte de ce que $\Sigma \sigma_{\mu\nu} \delta \gamma_{\mu\nu} = \Sigma \gamma_{\mu\nu} \delta \sigma_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \delta W = & \Sigma \sigma_{\mu\nu} \delta \gamma_{\mu\nu} + \Sigma \bar{\sigma}_{\mu\nu} \delta e_{\mu\nu} \\ & + \bar{\sigma}_{11} e_{11} \delta e_{11} + \bar{\sigma}_{11} (e_{12} + \omega) (\delta e_{12} + \delta \omega) \\ & + \bar{\sigma}_{12} [e_{11} (\delta e_{12} - \delta \omega_{12}) + (e_{12} - \omega) \delta e_{11} + e_{22} (\delta e_{12} + \delta \omega) + (e_{12} + \omega) \delta e_{22}] \\ & + \bar{\sigma}_{22} e_{22} \delta e_{22} + \bar{\sigma}_{22} (e_{12} - \omega) (\delta e_{12} - \delta \omega). \end{aligned}$$

Nous savons que l'expression adoptée pour W présente une approximation de l'ordre de $T\gamma^2$, par conséquent, la variation présente une approximation de l'ordre de $T\gamma \left\{ \begin{smallmatrix} \delta u \\ \delta v \end{smallmatrix} \right.$. Voyons quel est l'ordre de grandeur des termes écrits :

1) les termes $\Sigma \sigma_{\mu\nu} \delta \gamma_{\mu\nu}$ ou $\Sigma \sigma_{\mu\nu} \delta e_{\mu\nu}$ sont de l'ordre de $G\gamma \left\{ \begin{smallmatrix} \delta u \\ \delta v \end{smallmatrix} \right.$;

2) les termes $\Sigma \bar{\sigma}_{\mu\nu} \delta e_{\mu\nu}$ sont nuls par suite de ce que les $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ forment un système en équilibre ;

3) les termes restants sont de l'ordre de $\text{Tr} \left\{ \frac{\delta u}{\delta v} \right\}$, excepté les termes qui renferment w en dehors du signe δ ; ces termes sont de l'ordre de $\text{Tw} \left\{ \frac{\delta u}{\delta v} \right\}$.

Si maintenant l'ordre de grandeur T des tensions initiales $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ est petit par rapport à l'ordre de grandeur G du module d'élasticité, de façon qu'on ait $T = G\alpha$, où α est petit, la **partie principale** de la variation de W est entièrement connue; elle est donnée par les termes de l'ordre de $G\gamma \left\{ \frac{\delta u}{\delta v} \right\}$ et ceux de l'ordre de $\text{Tw} \left\{ \frac{\delta u}{\delta v} \right\}$ ou $G\alpha w \left\{ \frac{\delta u}{\delta v} \right\}$. Ces derniers termes doivent rentrer dans la partie principale, puisque w peut devenir de l'ordre $\sqrt{\gamma}$, grand par rapport à γ .

La partie principale de δW s'écrit donc :

$$\delta W = \sum^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \delta e_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_{11} w (\delta e_{12} + \delta w) + \bar{\sigma}_{12} w (\delta e_{22} - \delta e_{11}) - \bar{\sigma}_{22} w (\delta e_{12} - \delta w).$$

On remarque que la **partie principale de la variation de W n'est pas la variation de la partie principale**.

Si cette partie principale est nulle, quels que soient δu , δv , dans l'expression

$$\iint \delta W \, dx \, dy$$

de la variation totale d'énergie, cette variation est de l'ordre $G\alpha\gamma \left\{ \frac{\delta u}{\delta v} \right\}$, c'est-à-dire très petite, même pour de grandes valeurs des rotations. Ceci correspond précisément à l'équilibre indifférent. Le calcul des variations montre que cette condition s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\sigma}_{12} w) - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_{12} w) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_{11} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\sigma}_{12} w) = 0,$$

avec certaines conditions aux limites faciles à préciser. Ces équations sont celles qui expriment l'équilibre élastique d'un élément $dx \, dy$ d'un milieu élastique soumis à tension initiale $(\bar{\sigma}_{\mu\nu})$, lorsque les rotations sont grandes par rapport aux déformations. On voit qu'elles ont une interprétation immédiate du point de vue de la Statique. Elles se généralisent facilement au cas de trois dimensions.