Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*
Tome LIV, série B, première partie, *Comptes rendus des séances*, p. 22
Session du 25 janvier 1934. Deuxième Section.

# ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE RENFERMANT DES PARTICULES EN SUSPENSION

Note de M. M. Biot, Delft-Louvain

Donnons à un cube du fluide une accélération parallèle à une de ses arêtes, et demandons-nous quelles sont les pressions qui prennent naissance dans le fluide sous l'action de l'accélération et des mouvements relatifs des particules. Le gradient de pression, parallèlement à la direction considérée, se compose de plusieurs parties :

1° Une partie due au régime de pression hydrostatique, provoqué par l'accélération du fluide

$$-\rho_t \frac{dU}{dt},$$

U vitesse du fluide ;
$\rho_t$ masse spécifique du fluide.

2° Une partie dynamique due aux accélérations relatives des particules dans le fluide

$$k\,\rho_t \frac{du}{dt},$$

$u$ vitesse relative des particules ;
$k$ coefficient dépendant du nombre et des dimensions des particules.

3° Enfin, une partie due à la réaction visqueuse des particules en mouvement relatif dans le fluide

$$(\rho_p - \rho_d)\, g\, \frac{u}{v},$$

$\rho_p$ masse des particules par unité de volume de fluide ;
$\rho_d$ masse du fluide déplacé par unité de volume ;
$g$ accélération de la pesanteur ;
$v$ vitesse de chute des particules dans le fluide sous l'action de la pesanteur.

En prenant l'axe des $x$ parallèlement à la direction considérée, on trouve l'équation

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_t \frac{dU}{dt} + k\rho_t \frac{du}{dt} + (\rho_p - \rho_d) g \frac{u}{v}.$$

D'autre part, l'équation du mouvement relatif des particules dans le fluide s'écrit

$$(\rho_p + \frac{1}{2}\,\rho_d)\,\frac{du}{dt} = -\,(\rho_p - \rho_d)\,\frac{dU}{dt}\,(\rho_p - \rho_d)\,g\,\frac{u}{v}\,;$$

$\rho_p + \frac{1}{2}\rho_d$ est la masse apparente par unité de volume de fluide des particules supposées sphériques.

Éliminant $u$ entre les deux équations précédentes, on obtient

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \alpha\,\frac{\partial p}{\partial x} = -\,\rho_a\,\frac{d^2U}{dt^2} - \beta\,\frac{dU}{dt}$$

$$\alpha = \frac{\rho_p - \rho_d}{\rho_p + \frac{1}{2}\,\rho_d}\,\frac{g}{v}$$

$$\beta = \rho'\,\frac{\rho_p - \rho_d}{\rho_p + \frac{1}{2}\,\rho_d}\cdot\frac{g}{v}$$

$$\rho_a = \rho_t\left[1 + k\,\frac{\rho_p - \rho_d}{\rho_p + \frac{1}{2}\,\rho_d}\right];$$

$\rho_t - \rho_p + \rho_d = \rho'$ est la masse du mélange fluide-particules, $\rho_a$ n'est autre que la masse apparente d'inertie du mélange.

Il est intéressant de noter qu'elle dépend principalement du nombre et des dimensions des particules.

Si nous appelons $\mu_a$ le coefficient de viscosité du mélange fluide-particules, on remarque que la force extérieure qui agit sur l'unité de volume de fluide, a pour composantes

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_a\,\Delta U\,,$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_a\,\Delta V\,.$$

Les équations du mouvement s'écrivent donc

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_a\,\Delta U\right) = \rho_a\,\frac{d^2U}{dt^2} + \beta\,\frac{dU}{dt}\,,$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha\right)\left(-\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_a\,\Delta V\right) = \rho_a\,\frac{d^2V}{dt^2} + \beta\,\frac{dV}{dt}\,.$$

Les opérateurs $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d^2}{dt^2}$ ont la signification

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\,\frac{\partial}{\partial x} + V\,\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\,\frac{\partial}{\partial x} + V\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2.$$

Dans certains cas, ces équations pourront se simplifier comme suit

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)\frac{\partial p}{\partial x}=\rho_a\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial U}{\partial t},$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha\right)\frac{\partial p}{\partial y}=\rho_a\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial V}{\partial t}.$$

En éliminant la pression et en introduisant le tourbillon $\omega=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$, il vient

$$\rho_a\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\beta\frac{\partial\omega}{\partial t}=0,$$

c'est-à-dire, que dans le cas d'un fluide de faible viscosité, le tourbillon varie en chaque point d'une manière qui dépend de sa vitesse de variation à l'instant initial. On a

$$\omega=Ce^{-\frac{\rho_a}{\beta}t}+C'.$$

Le facteur $\frac{\rho_a}{\beta}$ est toujours positif. Une variation de tourbillon a tendance à se maintenir.

---

Louvain. — Établissements Fr. Ceuterick, rue Vital Decoster, 66.