

M. BIOT ET H. SMITS

Etude photo-élastique des tensions de contraction dans un barrage

**Extrait du 4^e Bulletin Technique de 1933
de l'Union des Ingénieurs sortis des Ecoles spéciales
de Louvain.**

BRUXELLES

**Imprimerie Robert LOUIS
37-39, rue Barrois**

1933

Etude photo-élastique des tensions de contraction dans un barrage

M. BIOT et H. SMITS

California Institute of Technology (1).

RESUME

On sait qu'une construction en béton, telle qu'un barrage, subit des contractions ou dilatations du fait des variations de température ou du changement de volume, durant ou après la prise. Le but de cette étude est l'évaluation des tensions provoquées par ces contractions et dilatations. L'équivalence entre ce problème et un état de tension provoqué par la simple traction d'une éprouvette est tout d'abord établie. On applique alors la méthode Photo-Elastique d'analyse des tensions à une éprouvette de bakélite transparente et de forme appropriée soumise à simple traction. Une méthode nouvelle de calcul de la somme des tensions principales a été utilisée, méthode qui dispense des mesures dilatométriques ou du calcul de point en point qui, jusqu'ici, rendaient la méthode Photo-Elastique très laborieuse. Les résultats sont donnés par trois figures, l'une d'elles représente les trajectoires des tensions principales, les deux autres donnent les lignes d'égales valeurs de chacune des tensions principales. Les chiffres figurant sur ces figures montrent que les tensions à la base du barrage, que l'on suppose solidaire d'une fondation élastique de même nature que le barrage, sont environ moitié moindres que celles qui prendraient naissance, si la fondation était rigide.

Comme toute construction du type hyperstatique, un barrage subit considérablement l'effet des variations de température. Ces variations de température ont deux causes :

1) L'influence saisonnière.

(1) Travail effectué au California Institute of Technology dans le département d'aéronautique dirigé par le Professeur von Kármán.

2) Le dégagement de chaleur dû à la prise du béton.

En outre, l'état de tension d'une construction en béton dépend encore d'un facteur indépendant de la température et des charges, et qui consiste en une variation de volume avec le temps.

L'étude complète de l'influence de ces facteurs sur un barrage réel est extrêmement compliquée car les températures et la contraction ne sont jamais uniformément réparties; de plus, le problème est, en général, un problème d'élasticité à trois dimensions.

Enoncé du problème.

Il est toutefois utile, afin de permettre l'évaluation approximative de l'effet produit, d'étudier un cas idéal relativement simple.

Considérons une pièce prismatique de section droite ABC (fig. 1); cette pièce est supposée intimement soudée à une fon-

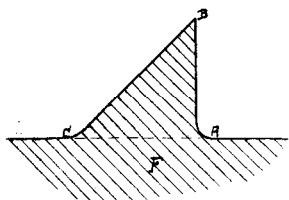


Fig. 1. — Section droite théorique représentant le barrage sur sa fondation.

dation F de même nature. Nous nous proposons de calculer les tensions engendrées dans la partie ABC, lorsque celle-ci se contracte seule, par suite, par exemple, d'un refroidissement uniforme. C'est un problème d'élasticité à deux dimensions. Il correspond sensiblement à celui de la distribution des tensions dans la région médiane d'un barrage poids, lorsque celui-ci se refroidit uniformément tout en restant intimement soudé à sa base à une fondation rocheuse de propriétés élastiques qui se rapprochent de celles du matériau du barrage.

La solution mathématique de ce problème est très compliquée, mais on obtient aisément sa solution expérimentale en utilisant la méthode photo-élastique.

I. — GENERALITES SUR LA TECHNIQUE PHOTO-ELASTIQUE UTILISEE

Le principe de la méthode est bien connu. On construit un modèle découpé dans une plaque d'un matériau transparent

approprié et auquel on donne le même contour que la section droite de la pièce à étudier. Si l'on fait agir sur le modèle un système de forces extérieures semblable au système agissant sur la pièce réelle, on obtient en général dans le modèle une distribution des tensions semblable à celle de la pièce originale. La mesure des tensions dans le modèle est faite en observant celui-ci dans un faisceau de lumière polarisée, entre Nicols croisés. En voici le détail de réalisation :

A. — *Différences des tensions principales.*

On photographie le modèle en lumière monochromatique entre Nicols croisés, avec interposition de deux micas quart-d'onde, de façon à obtenir de la lumière polarisée circulaire. Cette photographie montre des lignes alternativement claires et noires, franges d'interférence qui sont les lieux d'égales différences des tensions principales. Sur chaque frange on peut écrire la valeur correspondante de la différence des tensions principales (fig. 7). La mesure du coefficient de proportionnalité entre l'ordre d'une frange pour la longueur d'onde utilisée et la différence correspondante des tensions principales a été faite en soumettant une poutre de section rectangulaire du même matériau que le modèle à une flexion pure; on calcule les tensions et l'on photographie les franges produites.

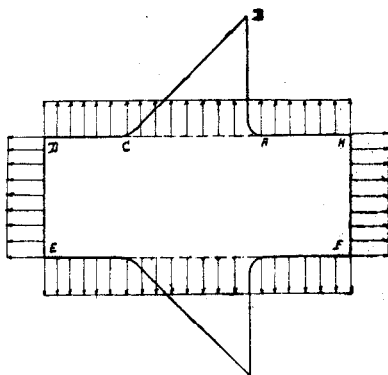


Fig. 2. — Représentation du modèle et des forces extérieures à réaliser pour produire dans le barrage ABC les tensions de contraction réelles.

B. *Direction des tensions.*

Une série de photographies en lumière blanche, sans interposition de micas quart-d'onde, est prise sur plaques panchromatiques. L'image est constituée de franges colorées et de lignes

noires. Celles-ci sont les lieux des points où les tensions principales sont parallèles aux directions d'extinction des Nicols (lignes isoclines). En surexposant la photographie, les franges colorées donnent une plage sensiblement uniforme et les lignes isoclines apparaissent seules. On prend une série de photographies pour diverses positions des Nicols, ce qui donne les isoclines pour les directions correspondantes des tensions principales (fig. 8).

C. — Somme des tensions principales.

Jusqu'ici, nous n'avons pas encore de quoi calculer séparément les valeurs des tensions principales. Pour cela, nous évaluons la somme de ces tensions en appliquant les équations de l'élasticité. La méthode repose sur une remarque faite indépendamment par plusieurs auteurs, dont l'un des auteurs de cet article. (2). On sait que les tensions dans l'état élastique à deux dimensions sont données par

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

où F est la fonction dite « d'Airy » satisfaisant à l'équation,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0$$

Ceci peut s'écrire,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Or, il est bien connu que la somme des tensions principales (p, q) est égale à la somme des tensions normales prises dans deux directions perpendiculaires quelconques, de sorte qu'on a,

$$\sigma_x + \sigma_y = p + q$$

et en vertu de l'équation précédente,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (p + q) = 0 \quad (1)$$

Ainsi donc, la somme des tensions principales satisfait à l'équation du potentiel.

(2) G. P. Den Hartog : Experimentelle lösung des ebenen Spannungsproblems. Z. A. M. M. 1931, p. 156.

C. B. Biezeno und J. J. Koch : Über einige Beispiele zur elektrischen Spannungsbestimmung. Ingenieur Archiv. N Dd, 1933.

M. Biot : Contribution à la Technique Photo-élastique. Annales de la Soc. Scientif. de Bruxelles, LIII B., 1933.

La valeur de cette somme est généralement connue sur le contour du modèle; si le contour est libre de forces extérieures, une des tensions principales est nulle et la somme se confond avec la différence des tensions principales dont la valeur est donnée par la photographie A; en général, les forces extérieures sont connues, la connaissance de la différence des tensions principales et de leur direction sur le contour permet de calculer la valeur de leur somme. Lorsque nous connaissons $p+q$ sur le contour, nous pouvons calculer sa valeur à l'intérieur par l'équation (1). La résolution de cette équation se fait aisément par une analogie physique; il est en effet possible de trouver des grandeurs physiques faciles à mesurer et qui satisfont à la même équation, par exemple le potentiel d'une plaque conductrice parcourue par certains courants électriques; il suffira de mesurer le potentiel de cette plaque à l'intérieur d'un contour identique au modèle et sur lequel on réalise une valeur du potentiel proportionnelle à $p+q$. On peut aussi tendre uniformément une membrane de caoutchouc s'appuyant sur un mur de même contour en plan que le modèle et dont la hauteur est proportionnelle à $p+q$, l'altitude de la membrane à l'intérieur du contour satisfait à l'équation du potentiel et donne par conséquent la valeur de $p+q$ en tout point. C'est cette dernière méthode que nous avons appliquée au problème qui nous occupe.

* * *

D. — Matériel utilisé.

Le système optique (3) présente ceci de particulier que le faisceau de lumière parallèle qui traverse le modèle est produit

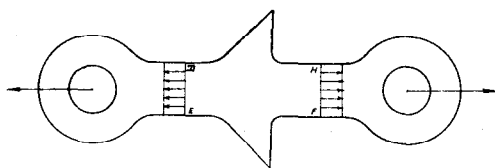


Fig. 3. — Forme de la pièce utilisée pour réaliser pratiquement une solution équivalente à celle de la figure 2.

par réflexion d'un faisceau conique, sortant du Nicol, sur un miroir concave. Après avoir traversé le modèle, le faisceau tombe

(3) Système suggéré par le Professeur A. Goetz du California Institute of Technology.

sur un miroir identique au premier qui le concentre sur un second Nicol. Une image très nette du modèle est produite sans utiliser aucune lentille. Le système est ainsi parfaitement achromatique, tout en permettant d'utiliser un faisceau de 20 cm. de diamètre.

La bakélite fut choisie pour matériau du modèle; cette matière est facile à usiner, sa sensibilité optique ou photo-élastique est trois fois supérieure à celle du celluloïd et elle a l'avantage de satisfaire à la loi d'Hooke. Son inconvénient réside dans la nécessité d'un traitement thermique préalable pour la rendre isotrope.

II. — ADAPTATION DE LA METHODE AU PROBLEME POSE

Nous allons montrer qu'il est possible de reproduire l'effet d'une contraction du barrage, en appliquant au modèle certaines forces.

Soit ε l'allongement par unité de longueur correspondant à la température ou au changement de volume au point considéré. On aura par exemple, en désignant par k le coefficient de dilatation thermique et par t la température,

$$\varepsilon = kt$$

Les équations de l'élasticité à deux dimensions s'écrivent, en tenant compte des différences de température,

$$2 G \Delta u + \frac{2 G \mu}{1 - 2 \mu} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{2 G}{1 - 2 \mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0$$

$$2 G \Delta v + \frac{2 G \mu}{1 - 2 \mu} \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{2 G}{1 - 2 \mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0$$

Les tensions sont données par,

$$\sigma_x = 2 G \left[\varepsilon_x + \frac{\mu \Theta}{1 - 2 \mu} \right] - \frac{2 G}{1 - 2 \mu} \varepsilon$$

$$\sigma_y = 2 G \left[\varepsilon_y + \frac{\mu \Theta}{1 - 2 \mu} \right] - \frac{2 G}{1 - 2 \mu} \varepsilon$$

$$\tau = 2 G \gamma$$

Ces équations montrent que l'effet de la dilatation thermique sur la déformation est la même que si l'on appliquait sur le con-

tour une traction normale $\frac{2 G}{1 - 2 \mu} \varepsilon$ et à l'intérieur une force de

ERRATA. — *Page 6, au lieu des deuxième et troisième équations, il faut lire :*

$$G \Delta u + \frac{G}{1-2\mu} \frac{\delta \Theta}{\delta x} - \frac{2G}{1-2\mu} \frac{\delta \varepsilon}{\delta x} = 0$$

$$G \Delta v + \frac{G}{1-2\mu} \frac{\delta \Theta}{\delta y} - \frac{2G}{1-2\mu} \frac{\delta \varepsilon}{\delta y} = 0$$

Page 8, il faut lire :

$$\tau = - \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y}$$

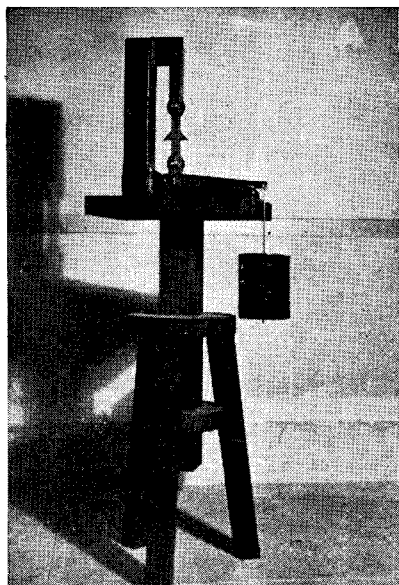


Fig. 4. — Photographie de l'appareil de mise en charge du modèle représenté à la figure 3.

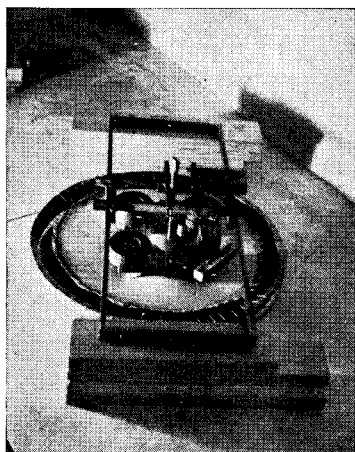


Fig. 5. — Vue de l'appareil servant au calcul de la somme des tensions principales par la méthode de la mesure de l'altitude d'une membrane tendue.

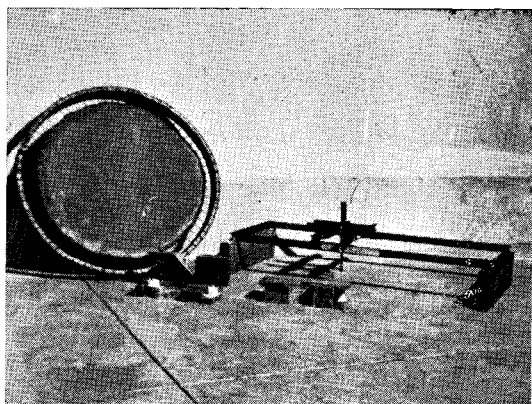


Fig. 6. — L'appareil de la figure 5 démonté.

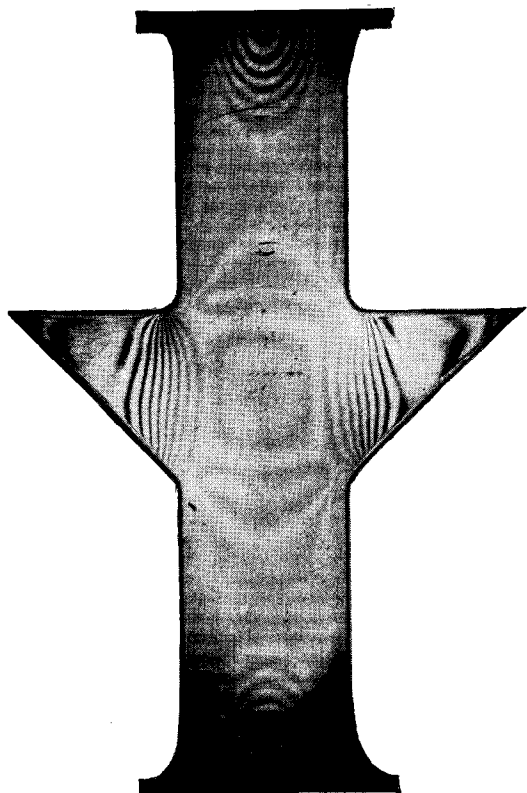


Fig. 7. — Photographie des lignes d'égales différences des tensions principales (franges d'interférence) prise en lumière monochromatique polarisée circulaire (modèle en bakélite).

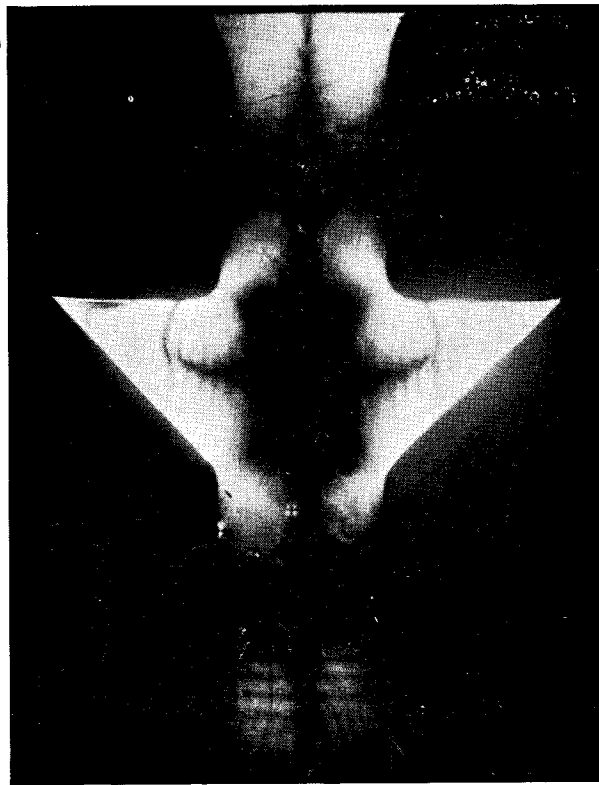


Fig. 8. — Photographie des régions et lignes isoclines (lieu des directions des tensions principales parallèles aux nicols) pour une direction parallèle à l'axe du modèle, prise en lumière blanche polarisée plane, sur plaque panchromatique.

volume de composantes,

$$X = \frac{2 G}{1-2 \mu} \frac{\delta \varepsilon}{\delta x}$$

$$Y = \frac{2 G}{1-2 \mu} \frac{\delta \varepsilon}{\delta y}$$

Il est donc possible de trouver un système de forces appliquées à la fois sur le contour et à l'intérieur du corps élastique, produisant la même déformation que la dilatation thermique.

Toutefois, les tensions ainsi engendrées ne sont pas les tensions thermiques; pour en déduire celles-ci, il suffit d'ajouter en chaque

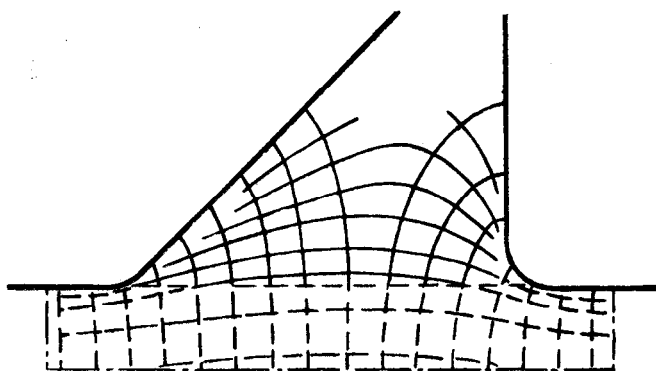


Fig. 9. — Directions et trajectoires des tensions principales dues à la contraction du barrage

point une pression dans toutes les directions, valant $\frac{2 G \varepsilon}{1-2 \mu}$.

On en déduit une méthode de solution du problème qui nous occupe. Il est d'abord évident qu'une contraction uniforme du barrage A B C produit dans celui-ci le même effet qu'une dilatation uniforme de la fondation F. Nous pourrions aussi remplacer l'ensemble du barrage et de sa fondation indéfinie par une pièce symétrique de dimension finie et dont la forme est représentée à la figure 2, ainsi que le système de forces équivalentes à appliquer pour obtenir l'effet d'une dilatation de la fondation. Comme il n'y a pas de dilatation dans la partie ABC qui représente le barrage, les tensions qui y sont ainsi produites représentent les tensions thermiques réelles. Remarquons, en outre, qu'on ne change pas la distribution des tensions dans la partie ABC si l'on supprime les forces appliquées le long de HD et FE, en diminuant

les forces appliquées le long de HF et ED, de manière à ne pas changer les longueurs HD et FE. En d'autres termes, pour obtenir les tensions réelles dans le barrage ABC, il suffit d'appliquer seu

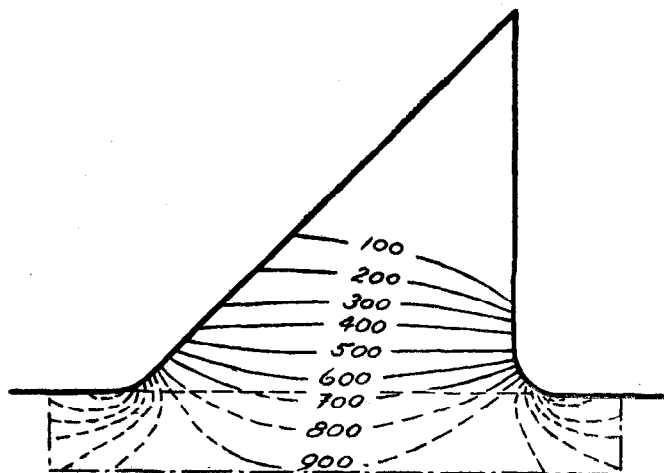


Fig. 10. — Valeur de la traction p produite le long des trajectoires horizontales de la figure 9.

lement, suivant HF et ED, des tensions telles que, si le rectangle HFED était débarrassé de la partie triangulaire ABC et de son symétrique, il prendrait, suivant sa longueur, un allongement uniforme ϵ .

Rappelons que nous nous plaçons toujours dans le cas de déformations planes ($\epsilon_z = 0$) de sorte que la grandeur des tensions à appliquer dans les sections FH et DE pour obtenir l'effet d'un

E

allongement unitaire ϵ est donc $\sigma = \frac{E}{1-\mu^2} \epsilon$.

E et μ sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau du barrage et de la fondation.

La mise en charge que l'on doit ainsi réaliser l'est très simplement sur un modèle représenté à la figure 3. C'est sur ce modèle en bakélite soumis à simple traction, que nous observerons l'effet photo-élastique. L'appareil de mise en charge ainsi que le modèle, sont photographiés à la figure 4.

A la figure 5 est représenté l'appareil appliquant le principe de la membrane, exposé plus haut, à la mesure de la somme des tensions principales; la figure 6 représente les parties démontées du même appareil, on y distingue le tambour sur lequel est tendue uniformément une membrane de caoutchouc.

III. — RESULTATS

La différence des tensions principales est calculée en utilisant la photographie figure 7. Elle représente les lignes d'égales différences des tensions principales. L'interposition de deux micas quart-d'onde élimine les lignes isoclines. La photo est prise en lumière monochromatique de longueur d'onde située dans le bleu du spectre.

La photographie de la figure 8 représente les lignes ou régions isoclines pour une direction des tensions principales parallèle à l'axe du modèle; elle est prise en lumière blanche sur plaque panchromatique et sans interposition de mica quart-d'onde. On voit que les franges d'interférence sont pratiquement éliminées. Une série de semblables photographies a été prise pour diverses orientation des Nicols. On en déduit l'orientation des tensions principales et, par conséquent, leurs trajectoires dessinées à la figure 9.

Afin de connaître séparément les valeurs des tensions principales, nous devons mesurer leur somme. Cette somme se déduit aisément de l'altitude d'une membrane tendue reposant sur une arête qui a la forme en plan du modèle et dont la hauteur est proportionnelle à l'ordre des franges sur le contour. La connaissance de la différence et de la somme des tensions principales permet de les calculer. Nous appelons p la *traction* qui s'exerce le long des *trajectoires horizontales* des tensions principales et q la *compression* le long des *trajectoires verticales*.

Les valeurs de p sont portées à la figure 10 et celles de q à la figure 11. Les valeurs indiquées correspondent à une certaine valeur de la contraction ϵ , du barrage cette valeur est telle que la tension

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \epsilon, = 1400$$

E module d'élasticité et μ coefficient de Poisson du barrage et de sa fondation. Comme toutes les tensions p et q sont proportionnelles à σ ou à la contraction ϵ , il est facile de les calculer pour une contraction quelconque; on calculera la valeur de σ correspondant à cette contraction arbitraire ϵ

$$\sigma = \frac{E}{1-\mu^2} \epsilon$$

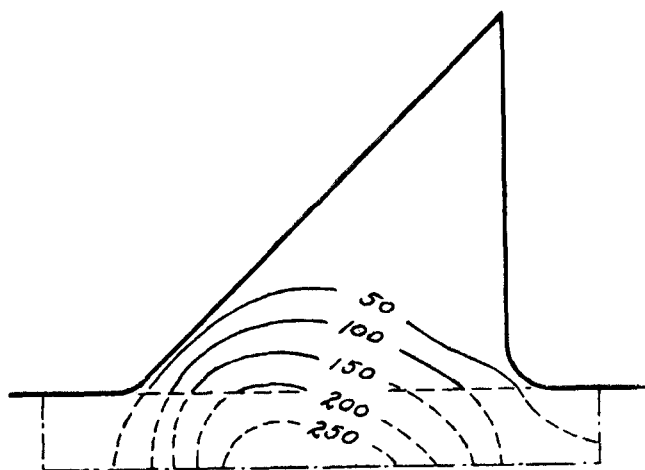


Fig. 11. — Valeur de la compression q produite les des trajectoires verticales de la figure 9.

et on multipliera toutes les valeurs de p et q des figures par le rapport

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\sigma}{1400}$$

Le choix des unités est arbitraire.