HARVARD UNIVERSITY

UN CAS D'INTÉGRABILITÉ DE L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE LA CHALEUR ET DE LA CONSOLIDATION DES SÉDIMENTS ARGILEUX

LE PROBLÈME DE LA CONSOLIDATION DES MATIÈRES ARGILEUSES SOUS UNE CHARGE

Reprinted from Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,
Serie B, 1935.

QUADRATIC WAVE EQUATION—FLOOD WAVES IN A CHANNEL WITH QUADRATIC FRICTION

Reprinted from the Proceedings of the National Academy of Sciences,
July, 1935.

By M. A. Biot

PUBLICATIONS FROM THE GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING

1935–36 No. 157

Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*.
Série B, *Sciences physiques et naturelles*, t. LV, 1935, p. 106.

UN CAS D'INTÉGRABILITÉ DE L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE LA CHALEUR ET DE LA CONSOLIDATION DES SÉDIMENTS ARGILEUX.

Note de M. M. BIOT.

Dans le cas le plus général de l'équation de la chaleur, la conductibilité thermique et la chaleur spécifique sont fonctions de la température. Nous allons montrer que lorsque le rapport de ces deux fonctions est constant, le problème de la barre semi-infinie dont on porte l'extrémité brusquement à une température constante est complètement intégrable.

Il existe un phénomène régi par l'équation de la chaleur où la restriction pour la chaleur spécifique d'être proportionnelle à la conductibilité s'applique parfaitement; c'est le cas de la consolidation des sédiments argileux sous une charge. Dans ce cas, en effet, comme l'a montré Terzaghi, l'auteur de cette théorie, le rapport de la compressibilité au coefficient de perméabilité est sensiblement constant.

Pour certains matériaux tels que les isolants, cette propriété s'applique approximativement au phénomène thermique.

L'équation de la chaleur à une dimension peut s'écrire sous la forme,

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Dans le cas le plus général, les coefficients c et k sont fonctions de la température u et de la coordonnée x.

Supposons que les coefficients c et b soient fonctions seulement de la température et qu'en outre ils soient dans un rapport constant indépendant de la température,

$$c(u) = \alpha\, b(u)\,.$$

Ce cas se présente dans la théorie de la consolidation (ou tassement) des sédiments argileux sous l'action d'une charge. Comme il a été établi par Terzaghi, la pression hydrostatique du matériau solide constituant un milieu poreux élastique et rempli de liquide tel qu'une argile, satisfait à l'équation de la chaleur. La compressibilité et la perméabilité jouent ici le rôle de la chaleur spécifique et de la conductibilité thermique.

La pression hydrostatique p supportée par le matériau poreux seul joue le rôle de la température. Les expériences de Terzaghi ont montré que la compressibilité a est très sensiblement proportionnelle à la perméabilité k [1]

$$a(p) = \alpha\, k(p)\,. \tag{1}$$

L'équation établie par Terzaghi pour la pression p supportée par le matériau poreux seul en un point d'une couche argileuse s'écrit,

$$a\,\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\,\frac{\partial p}{\partial x}\right]\cdot$$

En vertu de (1), on peut écrire

$$\alpha\, k(p)\,\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(p)\,\frac{\partial p}{\partial x}\right]\cdot \tag{2}$$

Une charge égale à p, est appliquée brusquement à la surface $x = 0$. Posons que p est fonction seulement de

$$\xi = \frac{x^2}{t}, \qquad p = p(\xi)$$

On a,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\xi}\cdot\frac{2x}{t}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{d^2 p}{d\xi^2}\,\frac{4x^2}{t^2} + \frac{dp}{d\xi}\cdot\frac{2}{t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{dp}{d\xi}\cdot\frac{x^2}{t^2}\,.$$

Reportons ces valeurs dans l'équation (2) qui peut s'écrire

$$\alpha\, k(p)\cdot\frac{\partial p}{\partial t} = k(p)\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{dk(p)}{dp}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2.$$

---

(1) C. Terzaghi, Erdbaumechanik, p. 176.

Il vient,

$$-\frac{\alpha}{4}\cdot\xi\cdot\frac{dp}{d\xi}=\frac{d^2p}{d\xi^2}\xi+\frac{1}{2}\frac{dp}{d\xi}+\frac{1}{k(p)}\frac{dk}{dp}\cdot\xi\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2.$$

C'est une équation différentielle ordinaire où p est fonction seulement de la variable ξ. En divisant cette équation par $\frac{\xi dp}{d\xi}$, elle devient différentielle exacte.

$$-\frac{\alpha}{4}-\frac{\frac{d^2p}{d\xi^2}}{\frac{dp}{d\xi}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\xi}+\frac{1}{k(p)}\frac{dk}{dp}\frac{dp}{d\xi}.$$

Par intégration, il vient avec la constante d'intégration C.

$$-\frac{\alpha\xi}{4}=\log C\frac{dp}{d\xi}+\log\sqrt{\xi}+\log k(p)$$

ou

$$e^{-\frac{\alpha\xi}{4}}=C\sqrt{\xi}\,k(p)\frac{dp}{d\xi}.$$

Les variables sont séparables et une seconde intégration donne

$$\int_\beta^\xi\frac{e^{-\frac{\alpha\xi}{4}}}{\sqrt{\xi}}d\xi=C\int_\Upsilon^p k(p)\,dp.$$

L'intégrale de gauche s'exprime par des fonctions connues. Par définition la « fonction des erreurs » $\Phi(x)$ est donnée par la relation,

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^x e^{-t^2}dt=\int_o^{x^2}\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}dt$$

d'où l'on déduit

$$\int_o^\xi\frac{e^{-\frac{av}{4}}}{\sqrt{v}}dv=\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}\,\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\xi}\right).$$

L'équation (3) peut s'écrire,

$$\sqrt{\frac{\pi 4}{\alpha}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\xi}\right)-\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta}\right)\right]=C\int_\Upsilon^p k(p)\,dp.$$

Nous devons déterminer β, Υ, C par les conditions aux limites qui sont,

$p=0$	pour	$t=0$	ou	$\xi=\infty$
$p=p_o$		$t=\infty$		$\xi=0$
$p=p_o$		$x=0$		$\xi=0$.

Les deux dernières conditions sont identiques ; elles donnent,

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\xi}\right)-\Phi(\infty)\right]=C\int_o^{\Upsilon} k(p)\,dp\,.$$

Or, $\Phi(\infty)=1$; d'où

$$\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}\left[\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\xi}\right)-1\right]=C\int_o^{p} k(p)\,dp\,.$$

La constante C est fournie par la condition

$$p=p_o \qquad \text{pour} \qquad \xi=0\,.$$

Et tenant compte de la relation $\Phi(o)=0$, on trouve

$$-\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}=C\int_o^{p_o} k(p)\,dp\,.$$

Il vient finalement pour l'expression de la pression p en fonction du temps t et de l'abscisse x,

$$1-\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{t}}\right)=\frac{\int_o^{p} k(\xi)\,\alpha\xi}{\int_o^{p_o} k(\xi)\,d\xi}\,.$$

Si k se réduit à une constante indépendante de la pression, cette relation devient la solution bien connue de l'équation linéaire de la chaleur.

$$1-\Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{t}}\right)=\frac{p}{p_o}\,.$$

La solution générale que nous avons considérée ne résout pas le problème de la consolidation d'une couche d'épaisseur finie ou de la transmission de chaleur à travers un mur d'épaisseur finie, mais elle donne une excellente approximation pour la première phase du phénomène. On peut facilement étudier la seconde phase par une méthode d'approximation précisément inapplicable à la première.

Dans le cas général où la chaleur spécifique et la conductibilité ne sont pas dans un rapport constant, mais sont des fonctions quelconques données de la température, la substitution $u=f\left(\frac{x^2}{t}\right)$ conduit encore à une équation différentielle ordinaire en $\frac{x^2}{t}\cdot$ Si cette équation ne pourra pas toujours s'intégrer par des quadratures, elle pourra cependant dans tous les cas se ramener à une équation ordinaire du premier ordre intégrable graphiquement par la méthode des isoclines.