HARVARD UNIVERSITY

UN CAS D'INTÉGRABILITÉ DE L'ÉQUATION NON LINÉAIRE DE LA CHALEUR ET DE LA CONSOLIDATION DES SÉDIMENTS ARGILEUX

LE PROBLÈME DE LA CONSOLIDATION DES MATIÈRES ARGILEUSES SOUS UNE CHARGE

Reprinted from Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,
Serie B, 1935.

QUADRATIC WAVE EQUATION—FLOOD WAVES IN A CHANNEL WITH QUADRATIC FRICTION

Reprinted from the Proceedings of the National Academy of Sciences,
July, 1935.

By M. A. Biot

PUBLICATIONS FROM THE GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING

1935–36 No. 157

LE PROBLÈME DE LA CONSOLIDATION DES MATIÈRES ARGILEUSES SOUS UNE CHARGE

Note de M. M. Biot.

Nous nous proposons de montrer qu'une théorie linéaire de la consolidation peut s'établir en combinant la théorie de l'Élasticité avec la loi de Darcy d'écoulement d'un fluide à travers un matériau poreux.

Supposons que le squelette poreux considéré comme un milieu continu et homogène satisfasse aux hypothèses habituelles de la théorie de l'Élasticité. Faisons abstraction pour l'instant du liquide qui le remplit. Les tensions qui agissent sur un élément cubique de côté unité de ce milieu poreux sont de même nature que celles que l'on définit en Élasticité habituelle. L'élément est supposé grand par rapport à la dimension des pores. Ces tensions peuvent être désignées par les composantes,

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{array}$$

Portons maintenant notre attention sur le liquide qui remplit les pores. Si ce liquide est à la pression q, il existe entre les faces de l'élément cubique considéré une tension normale isotrope,

$$\sigma = -(1-\alpha)\,q$$

où α est le pourcentage de la surface du cube occupé par le matériau solide du squelette.

Le système des forces qui agissent sur les faces de l'élément cubique considéré lorsque le matériau poreux est rempli de liquide à la pression q, est la somme des deux systèmes de tensions considérés ci-dessus et peut se représenter par les composantes

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x+\sigma & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y+\sigma & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z+\sigma\,. \end{array}$$

Ce système de forces intérieures doit être en équilibre, de sorte qu'on a;

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x+\sigma)+\frac{\partial \tau_z}{\partial y}+\frac{\partial \tau_y}{\partial z}=0 \\ &\frac{\partial \tau_z}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y+\sigma)+\frac{\partial \tau_x}{\partial z}=0 \qquad (1) \\ &\frac{\partial \tau_y}{\partial x}+\frac{\partial \tau_x}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z+\sigma)=0 \end{aligned}$$

Considérons les propriétés élastiques du squelette et supposons que dans l'ensemble, lorsqu'on fait abstraction des pressions du liquide à l'intérieur des pores, ce milieu se comporte comme un solide ordinaire et isotrope possédant un module d'Élasticité G au cisaillement et un coefficient de Poisson ν. On peut dès lors écrire les relations de l'Élasticité entre les tensions et les déformations.

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu\Theta}{1-2\nu}\right) \\
\sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu\Theta}{1-2\nu}\right) \\
\sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu\Theta}{1-2\nu}\right) \\
\tau_z &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\tau_y &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
\tau_x &= G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

Dans ces relations u, v, w sont les variations des coordonnées d'un point du milieu dues à la déformation et

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

est le changement de volume ou dilatation cubique du milieu. Si on remplace dans les équations d'équilibre (1) les valeurs données par la loi de Hooke (2), on trouve,

$$
\begin{aligned}
G\Delta u + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= 0 \\
G\Delta v + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= 0 \\
G\Delta w + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \frac{\partial\sigma}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Nous obtenons trois équations à quatre inconnues

$$u, \quad v, \quad w, \quad \sigma$$

Une quatrième équation nous est fournie par la loi de Darcy qui régit l'écoulement d'un liquide dans un milieu poreux. D'après cette loi, la vitesse moyenne du fluide est proportionnelle au gradient de pression ; on a :

$$
\begin{aligned}
V_x &= -k \frac{\partial p}{\partial x} \\
V_y &= -k \frac{\partial p}{\partial y} \\
V_z &= -k \frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Le coefficient k s'appelle coefficient de perméabilité du matériau.

Si nous considérons un cube élémentaire unitaire du matériau poreux, le volume de ses pores est égal au volume du liquide qu'il contient. L'accroissement de volume par unité de temps de ce cube élémentaire n'est autre que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

Cet accroissement de volume doit être égal au volume de liquide qui entre dans le cube par unité de temps, soit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

ou encore, en vertu des relations (4),

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = k \Delta q \tag{5}$$

Dérivons maintenant les équations (3) respectivement par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, et additionnons membre à membre, il vient,

$$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu} \Delta\Theta + \Delta\sigma = 0 .$$

Comme on a posé $\sigma = (1-\alpha) q$, on peut encore écrire

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)(1-\alpha)} \Delta\Theta - \Delta q = 0 \\
&\Delta \left[\frac{2G(1-\nu)}{(1-4\nu)(1-\alpha)} \Theta - q \right] = 0
\end{aligned}
\right\}
\tag{6}
$$

Dans cette dernière relation le terme

$$\frac{2G(1-\nu)\Theta}{(1-2\nu)(1-\alpha)} = -p \tag{7}$$

est l'excès de pression hydrostatique. On peut poser

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)(1-\alpha)} = c .$$

Le coefficient c correspond au module de compression.

En écrivant la relation sous la forme,

$$\Delta (p + q) = 0 \tag{8}$$

on voit que la somme de la pression hydrostatique q et de l'excès de pression hydrostatique p considérée comme fonction des coordonnées, satisfait à l'équation du potentiel.

En combinant (5), (7) et (8) nous trouvons.

$$\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)(1-\alpha)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$c \frac{\partial \Theta}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial t} .$$

En vertu de (8) $\Delta p = - \Delta q$

d'où

$$\frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = k \Delta p . \tag{9}$$

L'excès de la pression hydrostatique satisfait à l'équation de la chaleur; résultat conforme à la théorie de Terzaghi.

Le problème de la consolidation est ainsi complètement résolu du point de vue mathématique. La relation (9) donne en effet la pression p subie par le matériau solide à chaque instant. Connaissant p, on en déduit la pression hydrostatique du liquide q par la relation (8). La valeur σ est alors,

$$\sigma = - (1 - \alpha) q .$$

Les équations (3) montrent qu'on peut calculer les déplacements u, v, w comme en Élasticité ordinaire dans un milieu soumis à des forces de volume

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} , \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} , \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} .$$

On voit que le calcul des déplacements introduit non seulement les coefficients de compressibilité et de perméabilité du matériau, mais un troisième coefficient qui dépend du coefficient de Poisson.

Louvain. – Imprimerie « Établissements F. Ceuterick », rue Vital Decoster, 66