Effet de certaines discontinuités du sous-sol sur la répartition des pressions dues à une charge

Par M. Maurice BIOT,

Professeur à l'Université de Louvain.

Extrait de " Science et Industrie "

Édition " **Travaux** ".

Mai 1936.

Effet de certaines discontinuités du sous-sol sur la répartition des pressions dues à une charge

Par M. Maurice BIOT,

Professeur à l'Université de Louvain.

Introduction.

LA science des fondations se trouve souvent aux prises avec les phénomènes de tassement des sous-sols argileux sous l'action d'une charge.

On sait que ce problème est étudié depuis longtemps déjà par le professeur Terzaghi et ses élèves. La prévision du tassement dont l'importance est si considérable sur la tenue des bâtiments ne peut se faire que si l'on connaît la répartition des tensions dans le sol au début de l'application des charges. La solution de Boussinesq et ses dérivés déduits de la théorie de l'Elasticité des corps homogènes et isotropes conduit à une première approximation pour l'évaluation des tensions dans une masse argileuse homogène très profonde. Nous rappelons brièvement ces solutions dans le paragraphe 1 (cas *a*) de cet article.

On s'est demandé quelle pouvait bien être l'influence d'une base rocheuse horizontale rigide à une certaine profondeur *h*, soit que l'argile puisse glisser parfaitement sans frottement sur cette base, soit qu'au contraire elle y adhère d'une manière parfaite. Le premier de ces cas fait l'objet du paragraphe 3 (cas *b*) et le second l'objet du paragraphe 4 (cas *c*). La courbe de répartition des pressions verticales sur la base rigide a été calculée chaque fois pour une charge concentrée en un point (problème à trois dimensions) ou concentrée sur une droite (problème à deux dimensions). Dans le cas *c*, on a supposé que le coefficient de Poisson du sous-sol élastique vaut $\nu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que le matériau est incompressible. Les courbes *b* et *c* des figures 6 et 7 montrent que la présence d'une base rocheuse augmente notablement la pression au droit de la charge, comme on pouvait s'y attendre, mais que cette augmentation est légèrement moindre si le sous-sol élastique colle parfaitement à la base rocheuse.

D'autres auteurs, notamment Filon et Melan, ont étudié par des méthodes différentes le cas *b* à deux dimensions (2), (3). Nos résultats concordent au mieux avec les leurs. Le cas *c* à deux dimensions a été étudié par Marguerre (4), mais dans l'hypothèse où le sous-sol élastique a un coefficient de Poisson nul $\nu = 0$. Son résultat coïncide avec le nôtre à l'approximation des calculs.

Enfin un troisième cas qui fait l'objet du paragraphe 5 (cas *d*) envisage un sous-sol argileux très profond dans lequel se trouve noyée à la profondeur *h* une mince couche horizontale de sable. Ce cas est assimilé à celui d'un matériau homogène et isotrope très profond, contenant à la profondeur *h* une couche adhérente très mince d'un matériau parfaitement flexible, mais inextensible. Le problème est étudié à deux et à trois dimensions. La courbe des pressions au niveau de la couche inextensible (fig. 6 et 7), courbes *d*, montre que celle-ci a pour effet de diminuer de quelques pour cent la concentration des pressions verticales.

Ces calculs, dont le détail est publié ailleurs (1), ont été entrepris par l'auteur à la suggestion du professeur A. Casagrande, spécialiste de Mécanique du Sol à l'Université Harvard.

I. **Sous-sol élastique homogène de profondeur infinie** (cas *a*). — *Charge concentrée en un point.* — Lorsqu'une charge verticale P, concentrée en un point, agit à la surface supposée plane et horizontale d'un materiau élastique infiniment étendu et infiniment profond, cette charge se transmet en profondeur et les pressions se répartissent suivant une certaine loi. Les pressions, qui agissent verticalement sur le plan horizontal situé à la profondeur *h*, ont une distribution symétrique autour de la ligne d'action de la charge P comme indiqué à la figure 1. La pression *p* à la distance *r* de cette ligne d'action est donnée par la formule bien connue de Boussinesq,

$$p = \frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{r^2}{h^2}\right)^{5/2}} \qquad (1)$$

La pression maximum est située sous la charge et vaut,

$$p = \frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2} = \frac{\mathrm{P}}{(1{,}45\;h)^2},$$

soit la pression qu'on obtiendrait en répartissant la charge P sur un carré de côté 1,45 *h*, un peu moindre qu'une fois et demie la profondeur *h* (fig. 3).

La façon dont la pression est répartie autour du maximum est représentée par le rapport

$$p\Big/\frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{r^2}{h^2}\right)^{5/2}}$$

et figurée par la courbe *a* en trait plein de la figure 6.

Charge concentrée sur une droite de longueur infinie. — Lorsque, au lieu d'être concentrée sur un point, la charge verticale qui agit à la surface est concentrée uniformément sur une ligne de longueur infinie et a pour valeur P par unité de longueur, la pression *p* qui agit verticalement à la profondeur *h* à la distance *x* du plan d'action de la charge, se répartit comme indiqué à la figure 3. Elle a pour valeur :

$$p = \frac{2\,\mathrm{P}}{\pi\,h}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{x^2}{h^2}\right)^{2}}. \qquad (2)$$

La pression maximum est naturellement située au droit de la charge et vaut :

$$p = \frac{2\,\mathrm{P}}{\pi\,h} = \frac{\mathrm{P}}{1{,}57\,h}.$$

C'est la pression qu'on obtiendrait, en répartissant la charge P sur un rectangle de largeur unité et de longueur 1,57 *h*, soit un peu plus long qu'une fois et demie la profondeur (fig. 4).

La façon dont la pression se répartit de part et d'autre de ce maximum est représentée par le rapport :

(1) *Pour les détails du calcul, voir la publication de l'auteur dans la revue américaine* Physics : « *Effect of certain discontinuities on the pressure distribution in a loaded soil* » *M. A. Biot,* Physics, *December 1935.*

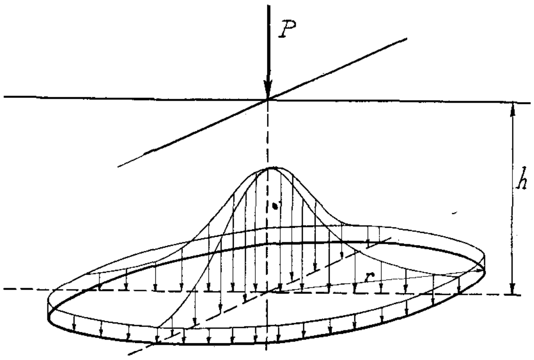

Fig. 1.

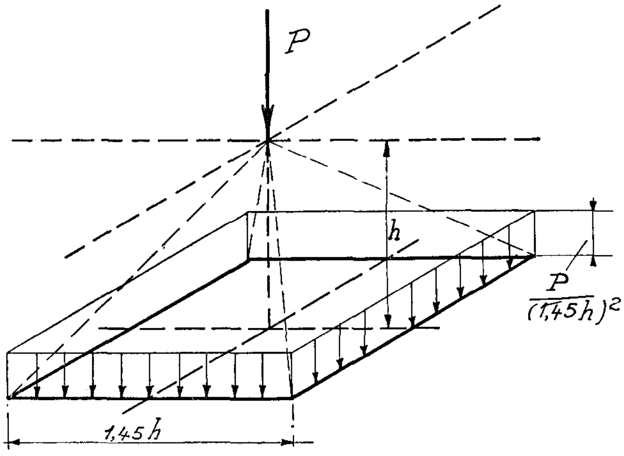

Fig. 2.

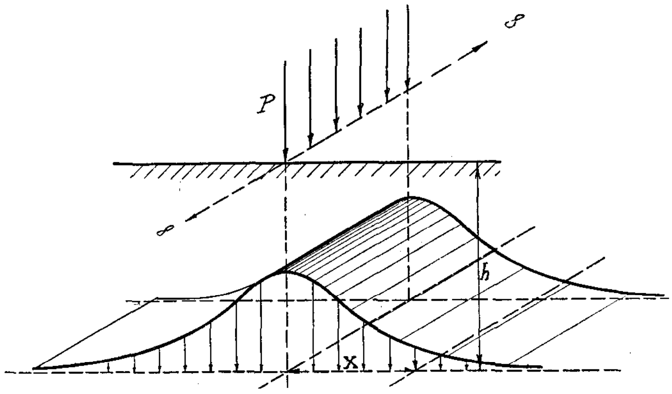

Fig. 3.

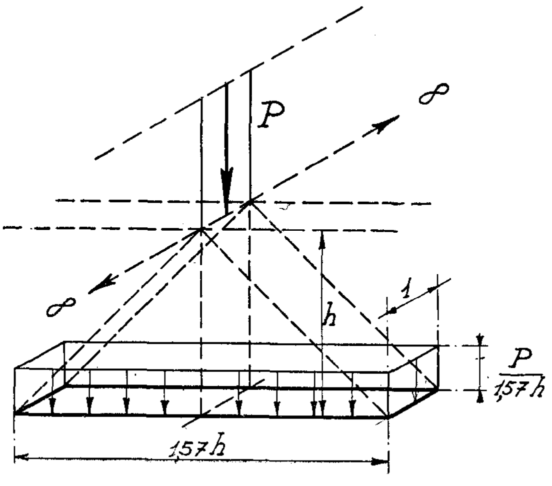

Fig. 4.

$$p \Big/ \frac{2P}{\pi h} = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{h^2}\right)^2}$$

et figurée à la figure 7 par la courbe a en trait plein.

Remarques au sujet des formules (1) *et* (2). — On remarquera que ces pressions sont rigoureusement indépendantes des coefficients d'élastiques du sous-sol et que ces formules s'appliquent, à condition qu'on puisse bien considérer le matériau constituant le sous-sol comme élastique homogène et isotrope pour les valeurs des charges appliquées.

II. **Autres cas possibles de sous-sols.** — On conçoit que les sols soient loin de satisfaire à toutes ces conditions. On peut toutefois considérer que les formules (1) et (2) ci-dessus constituent dans beaucoup de cas une première approximation. Elles supposent notamment, comme nous l'avons vu, que le matériau du sous-sol est homogène et infiniment profond.

On peut se demander ce que devient la répartition des pressions, lorsqu'une de ces hypothèses n'est pas réalisée. Par exemple, si la charge P est appliquée à un sol très élastique de profondeur finie h, qui repose sur une base plane parfaitement rigide. Quelle est alors la répartition des pressions à la profondeur h? On rencontre pratiquement ce cas lorsqu'une charge est appliquée à une couche d'argile reposant sur un fondement rocheux. Nous pouvons envisager le cas où l'argile colle à la roche et le cas où elle glisse parfaitement sur cette roche.

On peut aussi se demander quelle est la répartition des pressions à la profondeur h dans un sol, très élastique, infiniment profond, mais qui contient à cette profondeur h une couche horizontale d'un matériau très mince parfaitement flexible et inextensible. Ceci correspond au cas d'une argile très profonde contenant une couche horizontale mince de sable.

Nous avons étudié ces divers cas à la fois pour une charge concentrée en un point et pour une charge concentrée sur une droite infiniment longue. Nous ne ferons qu'énoncer les résultats du calcul (1).

III. **Sol élastique d'épaisseur finie reposant sans frottement sur une base rigide** (cas b). — Nous supposons que la charge verticale est appliquée à la surface d'une couche élastique d'épaisseur h (fig. 5) qui repose sans aucun frottement sur une base parfaitement rigide. Par hypothèse, le matériau élastique reste toujours en contact avec la base, et cela d'une manière telle que les deux surfaces en contact puissent glisser l'une par rapport à l'autre sans produire aucune réaction tangentielle. Nous avons calculé la pression p verticale qu'exerce à la profondeur h le matériau élastique sur le matériau rigide dans le cas d'une charge P concentrée en un point et dans le cas d'une charge P concentrée sur une droite. Comme pour le cas a, on trouve un résultat indépendant des coefficients d'élasticité du matériau.

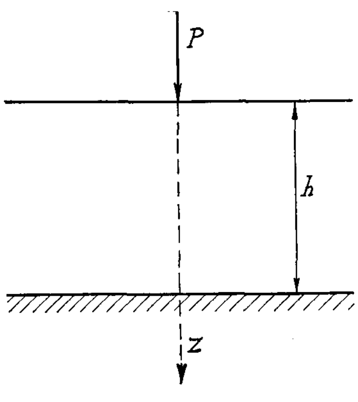

Fig. 5.

Charge P concentrée en un point. — Pour la charge P concentrée en un point, la pression p à la surface de contact et à la distance radiale r de la ligne d'action de P est donnée par l'expression :

$$p(r) = \frac{P}{2\pi h^2} \int_0^\infty 2 \cdot \frac{Ch\alpha + Sh\alpha}{Sh\,2\alpha + 2\alpha} J_0\left(\alpha \frac{r}{h}\right) d\alpha$$

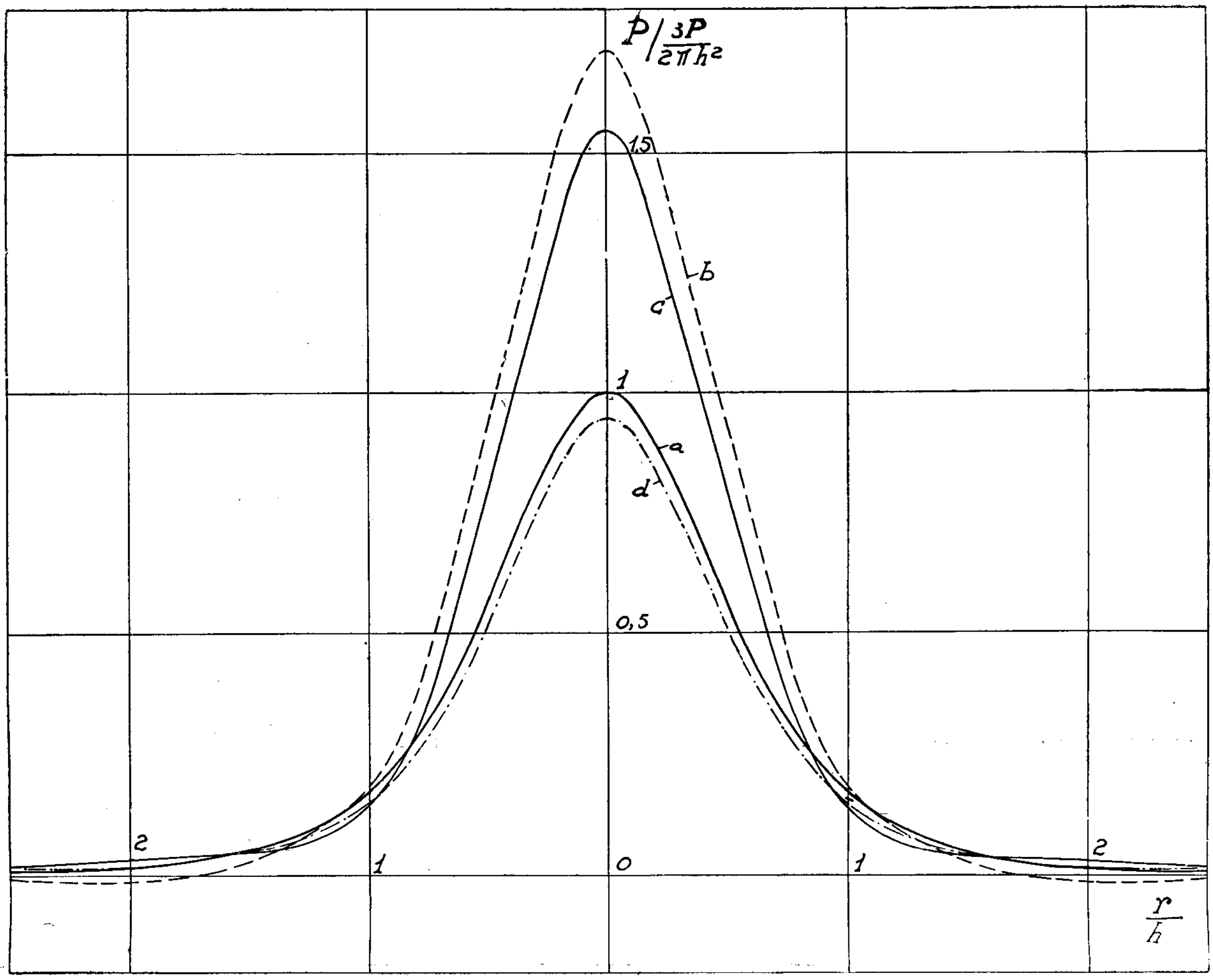

Fig. 6. — Distribution à la profondeur h des pressions p (r) due à une charge P concentrée en un point.

Courbe a. ——— **Distribution dans un sol homogène infiniment profond, pression maximum** $\frac{3\,P}{2\pi\,h^2}$.

Courbe b. – – – – **Sol élastique reposant sans frottement sur une base rigide, pression maximum 1,711** $\frac{3\,P}{2\pi\,h^2}$.

Courbe c. ——— **Sol élastique reposant sur une base rigide avec adhérence parfaite, pression maximum 1,557** $\frac{3\,P}{2\pi\,h^2}$

Courbe d. — . — . — . **Sol contenant une couche mince, flexible et inextensible, pression maximum 0,942** $\frac{3\,P}{2\pi\,h^2}$

Le symbole J_0 désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro. Cette intégrale peut s'évaluer par une méthode d'approximation. On trouve :

$$p(r) = \frac{3P}{2\pi h^2}\left[\frac{2}{\left[1+\left(\frac{r}{h}\right)^2\right]^{5/2}} - \frac{0{,}25}{\left[1+\left(\frac{r}{2h}\right)^2\right]^{5/2}} - 0{,}039\,\frac{1-3\left(\frac{r}{4h}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{r}{4h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{r}{4h}\right)^2\right]^{5/2}}\right].$$

Le rapport $p(r) \,/\, \frac{3P}{2\pi h^2}$ de $p(r)$ à la pression maximum que donnerait à la profondeur h un matériau élastique infiniment profond est représenté à la figure 6 par la courbe *b*.

La pression maximum est située sous la charge ; elle vaut :

$$p = 1{,}711\,\frac{3P}{2\pi h^2}.$$

Pour une charge concentrée en un point, la présence d'une fondation rigide à la profondeur h a donc pour effet d'y élever la pression verticale maximum d'environ 70 p. 100.

Charge concentrée sur une droite de longueur infinie. — Lorsque la charge P par unité de longueur est concentrée sur une droite infinie, la pression p à la distance x du plan d'action de la charge et la profondeur h est :

$$p(x) = \frac{2P}{\pi h}\int_0^{\infty} \frac{\alpha\,\mathrm{Ch}\,\alpha + \mathrm{Sh}\,\alpha}{\mathrm{Sh}\,2\alpha + 2\alpha}\cos\left(\alpha\,\frac{x}{h}\right)d\alpha.$$

Par résolution approchée, on trouve :

$$p(x) = \frac{2P}{\pi h}\left[\frac{2}{\left(1+\frac{x^2}{h^2}\right)^2} - \frac{0{,}05}{\left[1+\left(\frac{x}{2h}\right)^2\right]^2} - 0{,}059\,\frac{1-6\left(\frac{x}{4h}\right)^2+\left(\frac{x}{4h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{x}{4h}\right)^2\right]^4}\right].$$

Le rapport $p(x)\,\frac{2P}{\pi h}$ est représenté à la figure 7 par la courbe *b*.

Le maximum de pression est :

$$p = 1{,}441\,\frac{2P}{\pi h}.$$

Donc, dans le cas d'une charge concentrée sur une droite, la présence d'une base rigide parfaitement glissante à la profondeur h y élève la pression de 40 p. 100 environ.

La courbe b de la figure 7 montre qu'à une distance $\frac{x}{h} = 1{,}5$, les pressions deviennent légèrement négatives ; donc, si l'on fait abstraction de la pesanteur, le matériau élastique dans cette région a tendance à se détacher de la base.

La solution de ce dernier cas (problème à deux dimensions d'une charge concentrée sur une droite) fut obtenue par une méthode différente par L. N. G. Filon (2). Notre résultat concorde parfaitement avec le sien. Il fut aussi l'objet d'un calcul de E. Melan (3) qui conduit à la même formule. Toutefois son résultat numérique ne concorde pas parfaitement avec ceux de Filon et les nôtres ; il obtient bien la même pression maximum, mais les pressions négatives n'apparaissent pas sur son diagramme. Ceci s'explique par la précision sans doute moins grande de l'intégration numérique de Melan.

IV. **Sol élastique d'épaisseur finie reposant avec adhérence parfaite sur une base rigide** (cas c). — Pratiquement l'hypothèse de l'absence de frottement que nous avons faite dans le cas précédent n'est jamais réalisée ; il existe toujours une résistance au glissement de la couche élastique sur la base rigide. C'est pourquoi nous avons aussi calculé l'autre cas extrême où l'adhérence est parfaite, aucun glissement relatif des surfaces en contact n'étant permis. Le cas pratique se trouvera entre les deux cas limites (b) et (c).

Le calcul montre qu'ici le résultat dépend du coefficient de Poisson ν du matériau élastique. Nous avons choisi la valeur $\nu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire supposé le matériau incompressible.

L'étude du cas précédent (b) montre que l'influence probable du coefficient de Poisson sur le résultat sera extrêmement faible et que le choix d'une valeur particulière pour ν ne restreint pratiquement pas la généralité du résultat. Cette conclusion est d'ailleurs confirmée par une remarque ultérieure.

Charge concentrée en un point. — Pour une charge P concentrée en un point, la pression p à la profondeur h au niveau de la base rigide à la distance radiale r de la ligne d'action de la force P a pour valeur :

$$p(r) = \frac{P}{2\pi h^2} \int_0^\infty \frac{\alpha \operatorname{Ch} \alpha + \alpha \operatorname{Sh} \alpha}{\operatorname{Ch}^2 \alpha + \alpha^2} J_0\left(\alpha \frac{r}{h}\right) d\alpha$$

dont la solution approchée donne :

$$p(r) = \frac{3P}{2\pi h^2} \left[\frac{2}{\left[1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2\right]^{5/2}} - \frac{0{,}25}{\left[1 + \left(\frac{r}{2h}\right)^2\right]^{5/2}} - \right.$$

---

(2) L. N. G. Filon, *Phil. Trans. Roy. Soc. London 1904.*

(3) E. Melan, Beton u. Eisen, *18 (1919).*

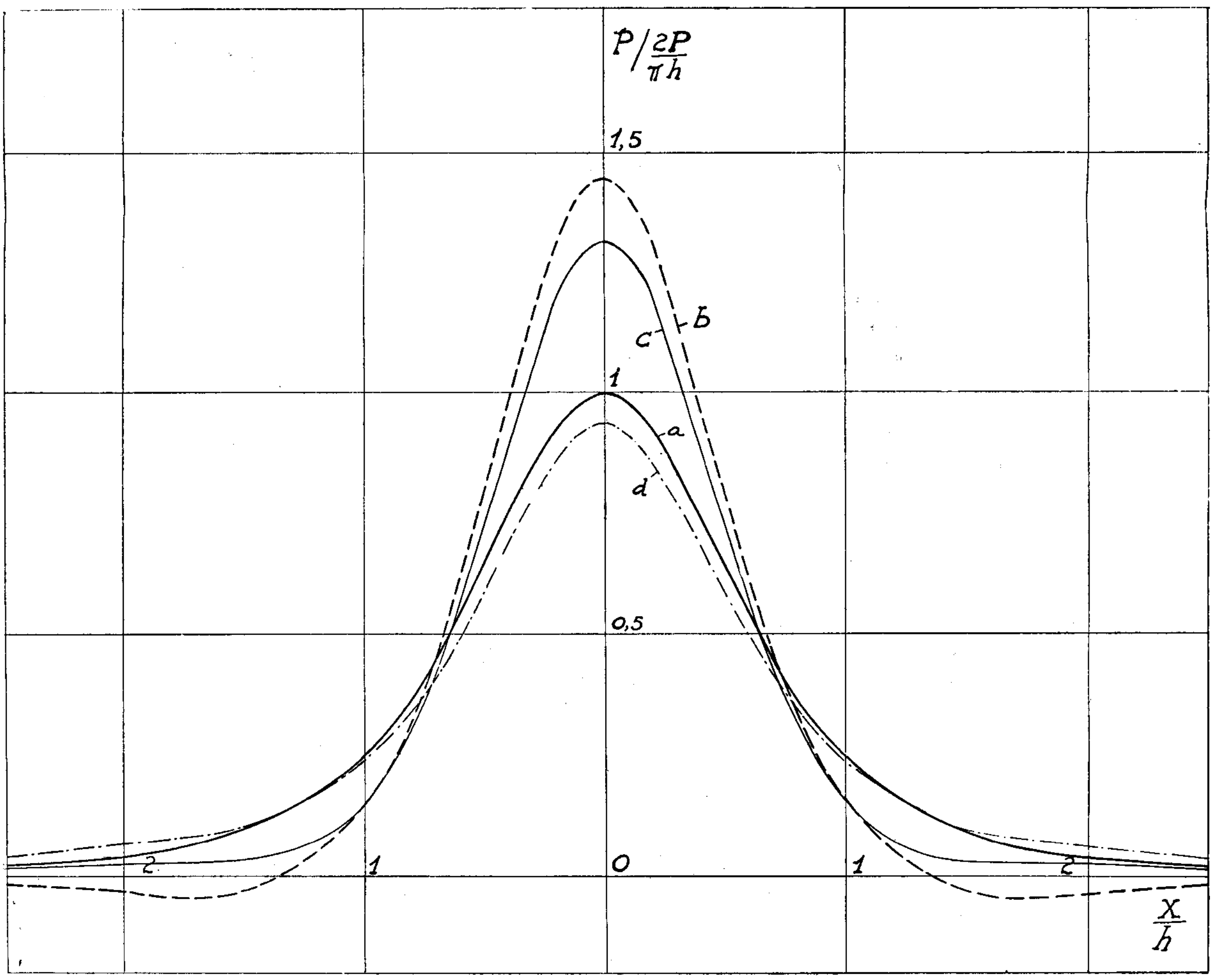

Fig. 7. — Distribution à la profondeur h des pressions p (x) due à une charge P par unité de longueur concentrée sur une droite.

Courbe a. ———— **Distribution dans un sol homogène infiniment profond, pression maximum $\frac{2P}{\pi h}$.**

Courbe b. – – – – **Sol élastique reposant sans frottement sur une base rigide, pression maximum 1,441 $\frac{2P}{\pi h}$.**

Courbe c. ———— **Sol élastique reposant sur une base rigide avec adhérence parfaite, pression maximum, 1,291 $\frac{2P}{\pi h}$.**

Courbe d. —.—.— **Sol contenant une couche mince, flexible et inextensible, pression maximum, 0,935 $\frac{2P}{\pi h}$.**

$$0{,}039\,\frac{1-3\left(\frac{r}{4h}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{r}{4h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{r}{4h}\right)^2\right]^{9/2}}-0{,}154\,\frac{1-5\left(\frac{r}{3h}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{r}{3h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{r}{3h}\right)^2\right]^{11/2}}\Bigg].$$

Le rapport $p\,(r)\,/\,\frac{3\,\mathrm{P}}{2\pi\,h^2}$ de cette pression à la pression maximum de la solution de Boussinesq à la profondeur h est représenté par la courbe c de la figure 6. La pression maximum a lieu sous la charge et vaut :

$$p = 1{,}557\,\frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2}.$$

Donc, par suite de l'effet d'adhérence, l'accroissement de pression maximum dû à la base rigide n'est plus que de 55 p. 100 au lieu de 70 p. 100 dans le cas précédent (*b*). L'adhérence réduit donc sensiblement la concentration de pression.

Charge concentrée sur une droite. — Pour une charge P par unité de longueur concentrée sur une droite, la pression sur la base rigide et à la distance x du plan d'action des forces est :

$$p\,(x) = \frac{\mathrm{P}}{\pi\,h}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Ch}\,\alpha + \mathrm{Sh}\,\alpha}{\mathrm{Ch}^2\,\alpha + \alpha^2}\cos\left(\alpha\,\frac{x}{h}\right)d\alpha.$$

Par résolution approchée, on trouve :

$$p\,(x) = \frac{2\mathrm{P}}{\pi h}\Bigg[\frac{2}{\left(1+\frac{x^2}{h^2}\right)^2}-\frac{0{,}5}{\left[1+\left(\frac{x}{2h}\right)^2\right]}-0{,}059\,\frac{1-6\left(\frac{x}{4h}\right)^2+\left(\frac{x}{4h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{x}{4h}\right)^2\right]^4}$$

$$-\,0{,}138\,\frac{1-10\left(\frac{x}{3h}\right)^2+5\left(\frac{x}{3h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{x}{3h}\right)^2\right]^5}$$

$$-\,0{,}012\,\frac{1-10\left(\frac{x}{8{,}8\,h}\right)^2+5\left(\frac{x}{8{,}8\,h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{x}{8{,}8\,h}\right)^2\right]^5}\Bigg].$$

Le rapport $p\,(x)\,\frac{2\mathrm{P}}{\pi h}$ est représenté par la courbe c à la figure 7.

Le maximum de pression est :

$$p = 1{,}291\,\frac{2\mathrm{P}}{\pi h}.$$

L'accroissement de pression dû à la base rigide n'est plus que de 30 p. 100 à cause de l'adhérence. Les pressions négatives n'apparaissent plus.

La répartition des pressions au niveau de la base rigide, lorsqu'on suppose l'adhérence parfaite et la charge concentrée sur une ligne comme nous venons de le considérer en dernier lieu, a aussi été calculée par Marguerre (4). Mais, au lieu de supposer $\nu = \frac{1}{2}$ comme nous l'avons fait, il a posé $\nu = 0$ dans ses formules. La concordance numérique avec notre résultat est parfaite, et sa courbe de répartition des pressions coïncide avec notre courbe c de la figure 7. Ceci montre bien que la valeur du coefficient de Poisson n'a pratiquement pas d'influence sur le résultat.

(4) Marguerre, *Druckverteilung durch eine elastiche Schicht auf starrer rauher Unterlage* (Ing. Arch., *1931, Bd 11*).

V. **Sol élastique de profondeur infinie contenant une couche mince adhérente parfaitement flexible et inextensible.** — Nous supposerons que le sol élastique est infiniment profond. A la profondeur h se trouve noyée dans le matériau une couche horizontale mince adhérente parfaitement inextensible et qui n'oppose aucune résistance à la flexion. Comme nous l'avons fait remarquer au début, ceci correspond au cas d'une mince couche horizontale de sable dans un sol argileux. Nous avons calculé l'effet d'une charge concentrée appliquée verticalement à la surface au point de vue de la répartition des pressions verticales au niveau de la couche inextensible, c'est-à-dire à la profondeur h.

Charge concentrée en un point. — Lorsque la charge P est concentrée en un point, la pression p sur la couche inextensible est donnée en fonction de la distance radiale r à la ligne d'action de P par :

$$p\,(r) = \frac{\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2}\int_0^\infty \alpha\,\frac{e^{-\alpha}}{1-\alpha\left[1-\frac{\alpha}{1+\alpha\,\mathrm{Th}\,\alpha}\right]}\,\mathrm{J}_0\left(\alpha\,\frac{r}{h}\right)d\alpha.$$

Par résolution approchée,

$$p\,(r) = \frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2}\Bigg[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{r^2}{h^2}\right)\right)^{5/2}}-0{,}058\,\frac{1-3\left(\frac{r}{3h}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{r}{3h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{r}{3h}\right)^2\right]^{9/2}}\Bigg].$$

Le rapport $p\,(r)/\,\frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2}$ est représenté par la courbe d à la figure 6.

Le maximum de pression est :

$$p = 0{,}942\,\frac{3\,\mathrm{P}}{2\,\pi\,h^2}$$

La couche inextensible réduit donc d'environ 6 p. 100 la pression.

Charge concentrée sur une droite. — Si la charge est concentrée sur une droite, la pression p au niveau de la couche inextensible à la distance x du plan d'action des forces est :

$$p\,(x) = \frac{\mathrm{P}}{\pi\,h}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha}}{1-\alpha\left[1-\frac{\alpha}{1+\alpha\,\mathrm{Th}\,\alpha}\right]}\cos\left(\alpha\,\frac{x}{h}\right)d\alpha.$$

Par résolution approchée,

$$p\,(x) = \frac{3\mathrm{P}}{\pi h}\Bigg[\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{h^2}\right)^2}-0{,}065\,\frac{1-6\left(\frac{x}{3h}\right)^2+\left(\frac{x}{3h}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{x}{3h}\right)^2\right]^4}\Bigg]$$

Le rapport $p\,(x)\,/\,\frac{2\mathrm{P}}{\pi h}$ est représenté à la figure 7 par la courbe d.

Le maximum de pression a pour valeur :

$$p = 0{,}935\,\frac{2\mathrm{P}}{\pi h}.$$

Il est donc réduit de 6,5 p. 100 par la présence de la couche inextensible.

6342-36. — Régie Imp. Crété, Corbeil.