

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

EXTRAIT

**Théorie de l'élasticité du second ordre
avec application à la théorie
du flambage**

PAR

M. BIOT

LOUVAIN
Secrétariat de la Société Scientifique de Bruxelles
II, RUE DES RÉCOLLETS, II
Chèques postaux : 2027.46 — Chèques postaux : Paris, 110002

—
1939

Théorie de l'élasticité du second ordre avec application à la théorie du flambage

PAR

M. BIOT

INTRODUCTION

La théorie de l'Élasticité part de l'hypothèse que les déformations, les rotations et les tensions sont des quantités petites du premier ordre, et les équations classiques négligent les termes du second ordre. Nous avons établi une théorie qui permet d'introduire aisément tous les termes du second ordre sans devoir formuler d'une manière explicite les propriétés élastiques du matériau.

La méthode variationnelle est adoptée dans ce qui suit, bien qu'elle ne soit pas essentielle. Le succès de la méthode, et la possibilité de déduire le même résultat à partir du point de vue très différent de la condition d'équilibre d'un élément infinitésimal sont dus à l'introduction d'une expression nouvelle du tenseur déformation.

L'énergie potentielle élastique correspondant à des équations de l'Élasticité du second ordre doit contenir tous les termes du troisième ordre. Ayant obtenu cette expression, nous remarquons qu'elle peut s'appliquer soit à une théorie du second ordre avec un état initial de tensions nulles, soit à une théorie du premier ordre à partir d'un état

initial de tension. Ceci tient au fait que notre expression de l'énergie potentielle contient tous les termes du premier ordre et du second ordre par rapport aux déformations indépendamment de la grandeur des tensions. On peut donc supposer les tensions initiales arbitraires et établir une théorie linéaire de l'Élasticité pour de petites déformations à partir de cet état et un petit accroissement correspondant des tensions. Ce sont ces équations que nous avons déduites ici. Elles permettent d'établir une théorie rigoureuse de phénomènes tels que la propagation des ondes dans un milieu soumis à un état initial de tension ou du phénomène d'instabilité de l'équilibre élastique généralement désigné sous le nom de flambage.

Nous avons mis en évidence la différence fondamentale que l'on doit introduire lorsqu'on considère la tension $s^{\mu\nu}$ par unité de surface après déformation ou la tension $t^{\mu\nu}$ par unité de surface avant déformation et nous avons aussi établi quelle relation doit exister entre ces deux représentations de la tension.

La loi d'Hooke est aussi différente lorsqu'on utilise l'un ou l'autre système de tension. Les modules d'élasticité constituent une matrice symétrique lorsqu'on considère les tensions $t^{\mu\nu}$ tandis qu'ils satisfont des relations différentes lorsqu'on considère les relations $s^{\mu\nu}$.

Les équations d'équilibre interne déduites de l'expression de l'énergie potentielle par la méthode variationnelle peuvent s'exprimer soit à l'aide des tensions $t^{\mu\nu}$ soit à l'aide des tensions $s^{\mu\nu}$. Celles qui utilisent les tensions $t^{\mu\nu}$ sont équivalentes à celles obtenues d'une manière toute différente par C. Biezeno et H. Hencky ⁽¹⁾.

La déduction des équations non linéaires de la théorie du second ordre lorsque les tensions initiales sont nulles n'a pas été faite ici, mais il est facile de voir qu'on est conduit à des équations dont la forme est identique à celle des équations obtenues.

Considérons d'abord une déformation pure homogène, définie par la transformation linéaire à coefficients symétriques

$$(1) \quad z^i = \sum_j (\delta_j^i + \epsilon_j^i) x^j$$

où

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\epsilon_j^i = \epsilon_i^j$$

⁽¹⁾ C. B. BIEZENO et H. HENCKY, On the General theory of elastic stability. *Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam Proceedings*. Vol. XXXI, n° 6.

Supposons un état de tension homogène σ_j^i associé à la déformation pure et proposons-nous de calculer la variation d'énergie potentielle de déformation lorsqu'on donne une variation $\delta \epsilon_j^i$ au tenseur déformation ϵ_j^i .

Désignons par F_i les forces par unité de surface agissant à la surface S d'un volume V . La variation δW_v d'énergie potentielle de ce volume est

$$(2) \quad \delta W_v = \iint_s \sum_i F_i \delta \xi^i dS$$

ou

$$(3) \quad \delta \xi^i = \sum_j \delta \epsilon_j^i x^j$$

et

$$(4) \quad F_i = \sum_j \sigma_j^i \alpha_j$$

où α_j désignent les cosinus directeurs de la normale extérieure à S .

Dès lors

$$(5) \quad \delta W_v = \iint_s \sum_{ij} \sigma_j^i \delta \xi^i \alpha_j dS.$$

Par la formule de Green ceci s'exprime sous forme d'une intégrale de volume

$$(6) \quad \delta W_v = \iiint_v \sum_{ij} \sigma_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \delta \xi^i dV.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^j} \delta \xi^i$ s'obtiennent facilement en résolvant le système (1) par rapport à x^j et substituant dans les équations (3). On trouve

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x^j} \delta \xi^i = \frac{1}{D} (1 + \epsilon) \delta \epsilon_j^i - \frac{1}{D} \sum_k \epsilon_k^j \delta \epsilon_k^i.$$

Comme nous avons en vue une théorie du second ordre, nous n'avons gardé dans cette expression que les termes du premier et du second ordre en ϵ_j^i .

Nous désignons par $D = |\delta_j^i + \epsilon_j^i|$ le déterminant ou Jacobien de la transformation (1) et $\epsilon = \sum_i \epsilon_i^i$. Nous substituons les valeurs (7) dans l'intégrale (6). En tenant compte que

$$\frac{dV}{D} = dV',$$

où V' désigne le volume initial occupé par V avant déformation on trouve

$$(8) \quad \delta W_{v'} = \iiint_{v'} \sum_{ij} \left[(1 + \epsilon) \sigma_j^i - \sum_k \epsilon_k^j \sigma_k^i \right] \delta \epsilon_j^i dV'$$

l'intégrale étant étendue maintenant au volume initial avant déformation.

L'expression

$$(9) \quad \delta W = \sum^{ij} \left[(1 + \epsilon) \sigma_i^j - \sum^k \epsilon_k^j \sigma_i^k \right] \delta \epsilon_j^i$$

est la variation d'énergie potentielle par unité de volume initial. En vertu de la symétrie on peut écrire

$$(10) \quad \delta W = \sum^{ij} \tau_i^j \delta \epsilon_j^i$$

avec

$$(11) \quad \tau_i^j = (1 + \epsilon) \sigma_i^j - \frac{1}{2} \sum^k (\epsilon_k^j \sigma_i^k + \epsilon_k^i \sigma_j^k).$$

Le tenseur τ_i^j constitue un autre mode de représentation de la tension. C'est la partie symétrique des neuf composantes des forces agissant après déformation sur les faces d'un cube unitaire initial. Le tenseur σ_i^j représente les tensions réelles tandis que τ_i^j représente les forces rapportées aux surfaces avant déformation.

Il nous reste maintenant à établir une expression pour le tenseur déformation ϵ_j^i correcte jusqu'au second ordre, lorsque la déformation n'est pas homogène.

Dans ce cas, les coordonnées initiales x^i d'un point P du matériau deviennent $\xi^i = x^i + u^i$ après déformation. Les u^i sont supposés fonctions continues des coordonnées initiales x^i .

La région infinitésimale qui entoure le point P subit la transformation homogène

$$(12) \quad d\xi^i = \sum^j \left(\delta_j^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) dx^j.$$

Posant

$$(13) \quad \begin{aligned} e_j^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \\ \omega_j^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

il vient

$$(14) \quad d\xi^i = \sum^j (\delta_j^i + e_j^i + \omega_j^i) dx^j.$$

L'élément de longueur s'écrit

$$(15) \quad ds^2 = \sum^i (d\xi^i)^2 = \sum^{\mu\nu} [\delta_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu$$

avec

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_\mu^i \delta_\nu^i = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^i e_{\mu}^i e_{\nu}^i \\
 (16) \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} \sum^i \left(\omega_{\mu}^i e_{\nu}^i + \omega_{\nu}^i e_{\mu}^i \right) \\
 \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} \sum^i \omega_{\mu}^i \omega_{\nu}^i
 \end{aligned}$$

Nous avons écrit $e_{\mu\nu}$ au lieu de e_{ν}^{μ} .

La transformation (12) n'est pas à coefficients symétriques. Toutefois nous pouvons lui associer la transformation à coefficients symétriques

$$(17) \qquad (d\xi^i)^1 = \sum^j (\delta_j^i + \epsilon_j^i) dx^j$$

ou

$$\epsilon_j^i = \epsilon_i^j.$$

L'élément de longueur de cette transformation est

$$(18) \qquad d\sigma^2 = \sum^{\mu\nu} \left[\delta_{\mu\nu} + 2\gamma_{\mu\nu} \right] dx^{\mu} dx^{\nu}$$

avec

$$(19) \qquad \gamma_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^i \epsilon_{\mu}^i \epsilon_{\nu}^i.$$

Nous avons écrit $\epsilon_{\mu\nu}$ au lieu de ϵ_{ν}^{μ} . On peut faire en sorte que les transformations (17) et (18) représentent le même état de déformation en posant l'identité

$$ds^2 = d\sigma^2$$

équivalente aux six équations

$$(20) \qquad g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}.$$

On en conclut que $\epsilon_{\mu\nu}$ et $e_{\mu\nu}$ diffèrent par une quantité du second ordre et, par conséquent, on peut écrire avec une erreur du troisième ordre les identités

$$(21) \qquad \sum^i e_{\mu}^i e_{\nu}^i = \sum^i \epsilon_{\mu}^i \epsilon_{\nu}^i.$$

Introduisant cette identité dans les équations (20), on trouve

$$(22) \qquad \epsilon_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^i \left(\omega_{\mu}^i e_{\nu}^i + \omega_{\nu}^i e_{\mu}^i \right) + \frac{1}{2} \sum^i \omega_{\mu}^i \omega_{\nu}^i.$$

Ceci donne les composantes du tenseur déformation correctes jusqu'au second ordre.

Introduisant ces composantes dans l'expression (10) pour δW , on peut

établir une théorie de l'Élasticité contenant tous les termes du premier et du second ordre en σ_i^j , ϵ_i^j et ω_i^j .

Nous pouvons aussi traiter le cas d'un milieu soumis à un état initial de tension S_i^j et subissant une petite déformation à partir de cet état. Nous nous posons alors le problème d'établir une théorie de l'Élasticité pour un tel milieu avec tous les termes linéaires.

Ces deux théories et les équations qui en résultent étant fort semblables, nous traiterons ici uniquement le second cas. Nous utiliserons indifféremment la notation $A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}$ pour le tenseur A_μ^ν selon l'avantage de la notation. Les formules ne sont par conséquent valables que pour des tenseurs cartésiens.

Les tensions initiales sont désignées par $S^{\mu\nu}$. Elles sont en équilibre et satisfont par conséquent à l'équation

$$(23) \quad \Sigma \frac{\partial S^{\nu i}}{\partial x^\nu} + \rho X^i = 0$$

où ρX^i représente la force de volume. On suppose que le matériau subit alors une transformation

$$\xi^i = x^i + u^i$$

telle que les grandeurs u^i , e_j^i et ω_j^i soient petites du premier ordre. Les tensions deviennent $S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$; nous supposons les accroissements de tensions petits du premier ordre.

Afin d'établir une théorie linéaire par rapport à u^i , e_j^i et ω_j^i , nous devons partir d'une expression de l'énergie potentielle contenant tous les termes linéaires et quadratiques par rapport à ces grandeurs.

En introduisant $\sigma^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$ dans l'expression (10), et négligeant les termes d'ordre supérieur au second, on a

$$(24) \quad \delta W = \Sigma^{\mu\nu} t^{\mu\nu} \delta \epsilon_{\mu\nu} + \Sigma^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \delta \epsilon_{\mu\nu}$$

avec

$$(25) \quad t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + \epsilon S^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \Sigma^k (\epsilon_k^\mu S^{\nu k} + \epsilon_k^\nu S^{\mu k}).$$

Le tenseur $t^{\mu\nu}$ est différent du tenseur $s^{\mu\nu}$. Ce dernier représente les accroissements des tensions réelles, tandis que $t^{\mu\nu}$ représente les accroissements des forces rapportées aux surfaces initiales.

La loi d'Hooke généralisée s'exprime par

$$(26) \quad t^{\mu\nu} = \Sigma^{\tau k} B_{\tau k}^{\mu\nu} \epsilon^{\tau k}$$

où la somme est étendue à toutes les *combinaisons* de r et k . La condition que δW soit différentielle exacte s'exprime par les quinze relations

$$(27) \quad B_{rk}^{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^{rk}.$$

L'énergie potentielle est une forme linéaire et quadratique

$$(28) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}.$$

Si nous introduisons les tensions réelles $s^{\mu\nu}$, la loi d'Hooke s'écrit

$$(29) \quad s^{\mu\nu} = \sum^{rk} C_{rk}^{\mu\nu} \epsilon^{rk}$$

avec la condition

$$(30) \quad \begin{aligned} C_{rk}^{\mu\nu} + S^{rk} \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{\mu\nu}} \sum^{\alpha} \left(S^{\alpha k} \epsilon_{\alpha}^r + S^{\alpha r} \epsilon_{\alpha}^k \right) = \\ C_{\mu\nu}^{rk} + S^{\mu\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_{rk}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \epsilon_{rk}} \sum^{\alpha} \left(S^{\alpha \mu} \epsilon_{\alpha}^{\nu} + S^{\alpha \nu} \epsilon_{\alpha}^{\mu} \right). \end{aligned}$$

On voit que les coefficients C n'obéissent pas à la relation de symétrie satisfaite par les coefficients B .

L'expression de l'énergie potentielle en fonction des tensions réelles est

$$(31) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} s^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} \epsilon - \frac{1}{2} \sum^k \left(\epsilon_k^{\mu} S^{\nu k} + \epsilon_k^{\nu} S^{\mu k} \right) \right] + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$$

Les expressions (28) et (31) de l'énergie potentielle renferment tous les termes linéaires et quadratiques. On peut évidemment substituer $e_{\mu\nu}$ au lieu de $\epsilon_{\mu\nu}$ dans les lois d'Hooke (26) et (29) et dans les relations (25). De même, on peut effectuer cette même substitution dans certains termes de l'énergie potentielle sans affecter les termes du premier et du second ordre. On trouve

$$(32) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$$

$$(33) \quad W = \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} s^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum^{\mu\nu} e_{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} e - \frac{1}{2} \sum^k \left(e_k^{\mu} S^{\nu k} + e_k^{\nu} S^{\mu k} \right) \right] + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$$

Le calcul des variations et le principe des travaux virtuels permettent à partir de ces valeurs W d'établir les équations d'équilibre du milieu. Admettons que la déformation est due à un accroissement ΔF^i des forces de surfaces et $p \Delta X^i$ des forces de volume. Annulons le travail virtuel total

$$(34) \quad \iint_s \sum^i (F^i + \Delta F^i) \delta u^i dS + \iiint_v \sum^i \rho (X^i + \Delta X^i) \delta u^i dV - \iiint_v \delta W dV = 0$$

avec l'expression (32) pour W .

Rappelons que W est l'énergie potentielle par unité de volume initial ; par conséquent, V est le volume initial et les variables d'intégration sont les coordonnées initiales.

Appliquons la méthode classique du calcul des variations. En tenant compte des conditions initiales d'équilibre (23) et des conditions initiales aux limites, on trouve

$$(35) \quad \sum^v \frac{\partial t^{vi}}{\partial x^v} + \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^v} \left(S^{\mu\nu} \omega_\mu^i + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} e_\mu^i - \frac{1}{2} S^{\mu i} e_\nu^\mu \right) + \rho \Delta X^i = 0$$

avec la condition aux limites

$$(36) \quad \Delta F^i = \sum^v t^{vi} \alpha_v + \sum^{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} \omega_\mu^i + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} e_\mu^i - \frac{1}{2} S^{\mu i} e_\nu^\mu \right] \alpha_v.$$

Les équations (35) sont les *équations d'équilibre d'un milieu soumis à tensions initiales avec tous les termes du premier ordre*.

Ces mêmes équations exprimées à l'aide des tensions réelles s'obtiennent en substituant les valeurs (25). On trouve

$$(37) \quad \sum^v \frac{\partial s^{vi}}{\partial x^v} + \sum^v \frac{\partial (e S^{vi})}{\partial x^v} + \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^v} \left(S^{\mu\nu} \omega_\mu^i - S^{\mu i} e_\nu^\mu \right) + \rho \Delta X^i = 0$$

et les conditions aux limites

$$(38) \quad \Delta F^i = \sum^i s^{vi} \alpha_v + e \sum^v S^{vi} \alpha_v + \sum^{\mu\nu} \left(S^{\mu\nu} \omega_\mu^i - S^{\mu i} e_\nu^\mu \right) \alpha_v.$$

Les équations (38) prennent une forme remarquable si on les transforme à l'aide des relations (23) et des identités

$$(39) \quad \sum^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(e_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu \right) = \sum^\mu \frac{\partial e_\mu^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial e}{\partial x^\nu}.$$

Les équations (37) deviennent

$$(40) \quad \sum^v \frac{\partial s^{vi}}{\partial x^v} + \rho \Delta X^i - \rho \sum^\mu \omega_\mu^i X^\mu + \sum^{\mu\nu} \left(S^{vi} \frac{\partial \omega_\nu^\mu}{\partial x^\mu} + S^{\mu\nu} \frac{\partial \omega_\mu^i}{\partial x^\nu} \right) - \rho e X^i - \sum^{\mu\nu} e_\mu^\nu \frac{\partial S^{\mu i}}{\partial x^\nu} = 0.$$

Les termes additionnels de la seconde ligne sont dus à la *courbure* et à la *torsion* d'un élément. Nous les dénommerons *termes de courbure*. Ceux de la troisième ligne sont des *termes de sustentation* dus à la déformation d'un élément dans le champ des tensions initiales. Ces derniers disparaissent si le champ initial est homogène. On peut vérifier que les *termes de courbure ne dépendent que du cisaillement*, car ils disparaissent

si la tension initiale est hydrostatique. Ce sont évidemment les termes de courbure qui jouent le rôle prépondérant dans le cas bien connu du *flambage* ou d'instabilité de l'équilibre élastique. Ce phénomène dépend donc de l'existence d'un état de *tension de cisaillement initial*.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une déformation plane. Posons

$$\begin{aligned} x' &= x & u' &= u & X' &= X \\ x^2 &= y & u^2 &= v & X^2 &= Y \\ e_{\mu}^{\nu} &= \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{pmatrix} & w_{\mu}^{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix} \\ e_{xx} &= \frac{\partial w}{\partial x} & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & w &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Les équations (40) deviennent

$$\begin{aligned} (41) \quad & \frac{\partial S^{11}}{\partial x} + \frac{\partial S^{12}}{\partial y} + \rho \Delta X + \rho w Y \\ & + (S^{11} - S^{22}) \frac{\partial w}{\partial y} - 2 S^{12} \frac{\partial w}{\partial y} \\ & - e \rho X - e_{xx} \frac{\partial S^{11}}{\partial x} - e_{yy} \frac{\partial S^{12}}{\partial y} - e_{xy} \left(\frac{\partial S^{12}}{\partial x} + \frac{\partial S^{11}}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

et une autre équation similaire pour la direction y .

Si les termes de cisaillement sont nuls ou négligeables, et s'il n'y a pas de force de volume, les équations (41) prennent la forme

$$\begin{aligned} (42) \quad & \frac{\partial S^{11}}{\partial x} + \frac{\partial S^{12}}{\partial y} + (S^{11} - S^{22}) \frac{\partial w}{\partial y} - 2 S^{12} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial S^{12}}{\partial x} + \frac{\partial S^{22}}{\partial y} + (S^{11} - S^{22}) \frac{\partial w}{\partial x} + 2 S^{12} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ce sont les équations typiques du phénomène de flambage. Les termes caractéristiques ne dépendent que des composantes $(S^{11} - S^{22})$ et S^{12} du cisaillement initial.