Elastizitätstheorie zweiter Ordnung mit Anwendungen.

Von *Maurice A. Biot* in New York.

Einleitung. In der klassischen Elastizitätstheorie geht man von der Voraussetzung aus, daß die Beanspruchungen, Formänderungen und Drehungen sehr klein sind. Sie werden durch Glieder erster Ordnung dargestellt, während Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Im folgenden wird eine Theorie entwickelt, die alle Glieder zweiter Ordnung enthält, jedoch nicht die explizite Formulierung der Beziehung zwischen Beanspruchung und Formänderung erfordert.

Die Resultate wurden mit Hilfe der Variationsrechnung abgeleitet, jedoch ist das ganz unwesentlich. Der Erfolg dieser Methode ist darauf zurückzuführen, daß für die Komponenten der Formänderung neue Ausdrücke (Abs. 1) gewählt wurden. Dadurch ergibt diese Methode Glieder, die sich in der klassischen Theorie nicht vorfinden, die man jedoch mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eines kleinen Elementes auch erhalten kann. Die Komponenten der Formänderung stehen in linearer Beziehung zu den tatsächlichen Längenänderungen.

Damit wird ein Ausdruck für die Dehnungsenergie aufgestellt (Abs. 2). Es ergibt sich in natürlicher Weise die Dualität der Darstellung des Beanspruchungszustandes. Zugleich werden Beziehungen abgeleitet zwischen den Komponenten der Beanspruchung, bezogen auf die Fläche vor der Formänderung, sowie denen, bezogen auf die Fläche nach der Formänderung.

Im Abschnitt 3 sind die Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet. Diese enthalten alle Glieder zweiter Ordnung und beziehen sich auf beide Systeme der Beanspruchungen. Auch hier wurde die Variationsrechnung angewandt.

Im letzten Abschnitt wird die lineare Theorie für kleine Formänderungen und kleine Änderungen der Beanspruchungen für einen Körper unter anfänglicher Beanspruchung behandelt. Daselbst wird ein Ausdruck für die potentielle Energie mit allen Gliedern zweiter Ordnung hergeleitet, sowie die linearen Gleichungen für das Gleichgewicht.

Diese Theorie ist vor allem anwendbar bei Behandlung der Fortleitung von Schwingungen in einem vorbeanspruchten Körper und bei Untersuchung des elastischen labilen Gleichgewichtes und der Knickung. Auch hier müssen wir streng unterscheiden zwischen kleinen Änderungen der Beanspruchung, bezogen auf die Flächen vor oder nach der Formänderung. Es ergab sich, daß die Elastizitätsmoduli des Hookeschen Gesetzes für die zusätzlichen Beanspruchungen und Formänderungen eine symmetrische Matrix sind, wenn die Beanspruchungen auf die Flächen vor der Formänderung bezogen sind. Dieses ist nicht der Fall für Beanspruchungen, bezogen auf die Flächen nach der Formänderung. Für den vorbeanspruchten Körper ergeben sich Gleichgewichtsbedingungen, die, für Beanspruchungen bezogen auf die Flächen vor der Formänderung, schon von C. Biezeno und H. Hencky[1]) auf ganz anderem Wege erhalten worden sind.

Nahe verwandt mit dieser Aufgabe ist das Problem der elastischen Stabilität, das auch schon verschiedentlich untersucht worden ist. R. V. Southwell[2]) hat den Fall einer anfänglichen gleichmäßigen Vorbeanspruchung behandelt mit den Koordinatenrichtungen längs der Hauptachsen. E. Trefftz[3]) hat Gleichungen aus der Dehnungsenergie abgeleitet, die den genauen Ausdrücken nicht ganz entsprechen. Erwähnt seien auch die Arbeiten von F. D. Murnaghan[4]) und von B. R. Seth[5]), die jedoch von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehen[6]).

1. Die Dehnung. Nach der Formänderung werden die Koordinaten eines materiellen Punktes x^i zu ξ^i. Die drei Funktionen ξ^i stellen ein stetiges Verzerrungsfeld dar. In der unendlich nahen Umgebung eines Punktes x^i wird die Verschiebung $d\,x^i$ zu $d\,\xi^i$:

$$d\,\xi^i = \sum^{j} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\,d\,x^j \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.1)$$

[1]) C. B. Biezeno and H. Hencky: On the general theory of elastic stability. Proceedings of the Royal Academy Amsterdam. 31 (1928), p. 569, u. 32 (1929), p. 444.

[2]) R. V. Southwell: On the theory of elastic stability. Phil. Trans. Roy. Soc. 1913, ser. A vol. 213, pp. 187—244.

[3]) E. Trefftz: Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts. Z. angew. Math. Mech. Bd. 13 (1933), S. 160 bis 165.

[4]) F. D. Murnaghan: Finite Deformations of an elastic solid. American Journal of Mathematics, 1937.

[5]) B. R. Seth: Finite Strain in elastic problems. Phil. Trans. Roy. Soc. A 234 (1935), pp. 231.

[6]) Siehe auch M. A. Biot: Theory of Elasticity with large displacements and rotations. Proceedings of the fifth International Congress of Applied Mechanics 1938, p. 117—122. — Théorie de l'Elasticité du second ordre. Ann. Soc. Scient. de Bruxelles LIX. ser. 1, p 104, 1939. — Non Linear theory of Elasticity and the linearized case for a body under initial stress. Phil. Mag. Sec. 7, Vol. XXVII, p. 468, April 1939.

Zugleich besteht die Beziehung

$$d\xi^i = \sum^j \left(\delta^i_j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right) d x^j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.2)$$

mit

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}.$$

Setzen wir

$$e^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right), \qquad \omega^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} - \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1.3),$$

wird

$$d\xi^i = \sum^j (\delta^i_j + e^i_j + \omega^i_j)\, d x^j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.4)$$

mit den Beziehungen

$$e^i_j = e^j_i, \qquad \omega^i_j = -\omega^j_i, \qquad \omega^i_i = 0.$$

Das Quadrat eines Längenelementes nach der Formänderung ist

$$d s^2 = \sum^i (d\xi^i)^2, \qquad d s^2 = \sum^{\mu\nu} (\delta_{\mu\nu} + 2\, g_{\mu\nu})\, d x^\mu d x^\nu \quad \ldots \ldots \quad (1.5),$$

wobei

$$\delta_{\mu\nu} = \sum^i \delta^i_\mu \delta^i_\nu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^i e^i_\mu e^i_\nu + \frac{1}{2}\sum^i (\omega^i_\mu e^i_\nu + \omega^i_\nu e^i_\mu) + \frac{1}{2}\sum^i \omega^i_\mu \omega^i_\nu \quad \ldots \quad (1.6).$$

Anstatt e^ν_μ haben wir $e_{\mu\nu}$ gesetzt.

Der Tensor $g_{\mu\nu}$ ist allgemein als Verschiebungstensor bekannt. Es ist jedoch besser, einen anderen endlichen Deformationstensor so zu bestimmen, daß er in linearer Beziehung zur Längenänderung ds, anstatt zum Quadrate ds^2 der Längenänderung steht.

Zu diesem Zwecke wird die folgende lineare Transformation mit symmetrischen Koeffizienten eingeführt:

$$(d\xi^i)' = \sum^j (\delta^i_j + \varepsilon^i_j)\, d x^j \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.7),$$

wobei

$$\varepsilon^i_j = \varepsilon^j_i.$$

Nach Einführung dieser Transformation wird das Quadrat des Längenelementes die Form annehmen

$$d\sigma^2 = \sum^{\mu\nu} (\delta_{\mu\nu} + 2\,\gamma_{\mu\nu})\, d x^\mu d x^\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.8),$$

wobei

$$\gamma_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon^i_\mu \varepsilon^i_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.9)$$

wird. Wir setzen $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon^\nu_\mu$.

Die Transformation (1.7) läßt bekanntlich keine Winkeländerungen zu[7]) und kann daher als Definition einer reinen Dehnung verwandt werden, wobei die endlichen Dehnungen durch die Komponenten ε^i_j dargestellt werden. Mit der Identität

$$d s^2 = d\sigma^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.10)$$

wird die Transformation (1.4) und (1.7) den gleichen Zustand einer homogenen Dehnung darstellen. Das bedeutet zugleich, daß

$$g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1.11)$$

wird.

So erhält man sechs Gleichungen, in denen die sechs Dehnungskomponenten ε^i_j durch die Koeffizienten e^i_j und ω^i_j der allgemeineren Transformation (1.4) dargestellt werden. Die

[7]) A. E. H. Love: Mathematical theory of Elasticity, pp. 65, Cambridge 1906.

sechs Größen ε^i_j, die durch diese Gleichungen dargestellt sind, können als Komponenten endlicher Dehnung in der allgemeinen Transformation aufgefaßt werden.

Sie sind irrationale Funktionen der Größen e^j_i und ω^j_i: Jedoch können sie leicht bestimmt werden, wenn wir uns mit einer Approximation zweiten Grades begnügen und somit e^j_i und ω^j_i als Größen erster Ordnung ansehen.

Wir sehen aus Gl. (1.11), daß e^j_i und ε^j_i sich nur um Größen zweiter Ordnung unterscheiden. Wir können daher mit einem Fehler dritter Ordnung schreiben

$$\sum^{i} e^i_\mu e^i_\nu = \sum^{i} \varepsilon^i_\mu \varepsilon^i_\nu \quad \ldots \ldots \ldots (1.12).$$

Dieses in Gl. (1.11) eingesetzt, ergibt

$$\varepsilon_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^{i}(\omega^i_\mu e^i_\nu + \omega^i_\nu e^i_\mu) + \frac{1}{2}\sum^{i}\omega^i_\mu \omega^i_\nu \quad \ldots \ldots (1.13).$$

2. Die Dehnungsenergie. Wir berechnen jetzt die Dehnungsenergie einer reinen, homogenen Dehnung

$$\xi^i = \sum^{j}(\delta^i_j + \varepsilon^i_j)x^j \quad \ldots \ldots \ldots (2.1),$$

wobei $\varepsilon^i_j = \varepsilon^j_i$.

Mit der Annahme, daß die Beanspruchung σ^i_j und Dehnung ε^i_j Größen erster Ordnung sind, wird ein Ausdruck für die Dehnungsenergie hergeleitet, der bis zur dritten Ordnung als richtig angenommen ist. Dieses entspricht einer Näherung zweiter Ordnung der Gleichgewichtsbedingungen.

Das entsprechende homogene Spannungsfeld σ^i_j hat die gleichen Koordinatenachsen wie die Dehnung. Es ist auch

$$\sigma^i_j = \sigma^j_i.$$

Die auf die Flächeneinheit bezogene Oberflächenkraft, die an der Oberfläche S eines Volumenelementes V des Körpers angreift, ist

$$F_i = \sum^{j}\sigma^j_i a_j \quad \ldots \ldots \ldots (2.2),$$

wobei die Größen a_j die Richtungskosinusse der äußeren Flächennormalen der Oberfläche S sind.

Ändern wir die Dehnungskomponenten um die kleinen Größen $\delta\varepsilon^i_j$, so ändern sich die Koordinaten des Volumens um

$$\delta\xi^i = \sum^{j}\delta\varepsilon^i_j x^j \quad \ldots \ldots \ldots (2.3).$$

Die von der Oberflächenkraft geleistete Arbeit, die dieser Dehnungsänderung entspricht, ist gleich der Dehnungsenergie δW_V des Volumens

$$\delta W_V = \iint_S \sum^{i} F_i\,\delta\xi^i\,dS \quad \ldots \ldots \ldots (2.4).$$

Nach (2.2) können wir schreiben

$$\delta W_V = \iint_S \sum^{ij}\sigma^j_i\,\delta\xi^i\,a_j\,dS.$$

Nach der Greenschen Formel kann dieser Ausdruck auch als ein Volumenintegral geschrieben werden:

$$\delta W_V = \iiint_V \sum^{j}\frac{\partial}{\partial\xi^j}\sum^{i}\sigma^j_i\,\delta\xi^i\,dV.$$

Da wir es mit einem homogenen Feld zu tun haben, sind die σ^j_i alle konstant, deshalb

$$\delta W_V = \iiint_V \sum^{ij}\sigma^j_i\frac{\partial}{\partial\xi^j}\delta\xi^i\,dV \quad \ldots \ldots \ldots (2.5).$$

Wenn man das Gleichungssystem (2.1) nach den drei Größen x^i als Funktionen von ξ^i auflöst, kann man die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial\xi^j}\delta\xi^i$ leicht erhalten. Wir lassen die Größen zweiter Ordnung fort und erhalten

$$D x^i = (1+\varepsilon)\,\xi^i - \sum^{j} \varepsilon^i_j \xi^j ,$$

wo

$$\varepsilon = \sum^{i} \varepsilon^i_i \quad \text{und} \quad D = \left|\delta^i_j + \varepsilon^i_j\right|$$

die Determinante der Transformation (2.1) ist. Diese Näherung ist gerechtfertigt, denn sie hat keinen Einfluß auf die Glieder der ersten drei Ordnungen im Ausdruck für δW.

Nach Einsetzen von

$$D\,\delta\xi^i = (1+\varepsilon)\sum^{j} \xi^j \delta\varepsilon^i_j - \sum^{\varkappa j} \varepsilon^\varkappa_j \xi^j \delta\varepsilon^i_\varkappa$$

oder

$$D\,\delta\xi^i = \sum^{j} \left[(1+\varepsilon)\,\delta\varepsilon^i_j - \sum^{\varkappa} \varepsilon^\varkappa_j \delta\varepsilon^i_\varkappa\right] \xi^j$$

in den Ausdruck (2.3), wird

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j}\delta\xi^i = \frac{(1+\varepsilon)}{D}\,\delta\varepsilon^i_j - \frac{1}{D}\sum^{\varkappa} \varepsilon^\varkappa_j \delta\varepsilon^i_\varkappa$$

und

$$\delta W_I = \iiint_{V} \left[\sum^{ij} (1+\varepsilon)\,\sigma^j_i \delta\varepsilon^i_j - \sum^{ij\varkappa} \varepsilon^\varkappa_j \sigma^j_i \delta\varepsilon^i_\varkappa\right] \frac{dV}{D} \quad \ldots \ldots \quad (2.6).$$

Nennen wir V' den Volumeninhalt vor der Dehnung, so können wir schreiben

$$\frac{dV}{D} = dV'.$$

Daher wird

$$\delta W_I = \iiint_{V'} \sum^{ij} \left[(1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \sum^{\varkappa} \varepsilon^j_\varkappa \sigma^\varkappa_i\right] \delta\varepsilon^i_j \, dV' \quad \ldots \ldots \quad (2.7).$$

So wird denn die Änderung der Dehnungsenergie bezogen auf das ursprüngliche Volumen

$$\delta W' = \sum^{ij} \left[(1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \sum^{\varkappa} \varepsilon^j_\varkappa \sigma^\varkappa_i\right] \delta\varepsilon^i_j \quad \ldots \ldots \quad (2.8).$$

Der unsymmetrische Tensor

$$(1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \sum^{\varkappa} \varepsilon^j_\varkappa \sigma^\varkappa_i$$

kann daher als die Oberflächenkraft nach der Dehnung aufgefaßt werden, die an den Seitenflächen eines ursprünglich kubischen Einheitselementes angreift.

Jedoch tritt nur der symmetrische Teil dieses Tensors in dem Ausdruck von $\delta W'$ auf, weil $\delta\varepsilon^i_j = \delta\varepsilon^j_i$.

Deshalb erhalten wir, wenn wir für den symmetrischen Teil den folgenden Ausdruck benutzen

$$\tau^j_i = (1+\varepsilon)\,\sigma^j_i - \frac{1}{2}\sum^{k} \left(\varepsilon^j_\varkappa \sigma^\varkappa_i + \varepsilon^i_\varkappa \sigma^\varkappa_j\right) \quad \ldots \ldots \quad (2.9)$$

den Ausdruck:

$$\delta W' = \sum^{ij} \tau^j_i \delta\varepsilon^i_j \quad \ldots \ldots \quad (2.10).$$

Der Tensor τ^j_i kann als die Beanspruchung, bezogen auf die Fläche vor der Dehnung, und der Tensor σ^j_i als die Beanspruchung, bezogen auf die Fläche nach der Dehnung aufgefaßt werden. Gl. (2.9) gibt die Beziehungen an, die zwischen den beiden Systemen von Spannungskomponenten bestehen.

Das Bestehen einer Funktion der Dehnungsenergie setzt voraus, daß δW ein exaktes Differential ist.

Deshalb müssen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen

$$\tau^j_i = \tau^j_i(\ldots\varepsilon^s_r\ldots) \quad \text{oder} \quad \sigma^j_i = \sigma^j_i(\ldots\varepsilon^\varkappa_r\ldots)$$

den folgenden achtzehn Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial \tau^j_i}{\partial \varepsilon^s_r} = \frac{\partial \tau^s_r}{\partial \varepsilon^j_i} \quad \ldots \ldots \quad (2.11)$$

oder

$$(1+\varepsilon)\frac{\partial \sigma_i^j}{\partial \varepsilon_r^s}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_r^s}\sum^{k}\left(\varepsilon_k^j \sigma_i^k+\varepsilon_k^i \sigma_j^k\right)=(1+\varepsilon)\frac{\partial \sigma_r^s}{\partial \varepsilon_i^j}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i^j}\sum^{k}\left(\varepsilon_k^s \sigma_r^k+\varepsilon_k^r \sigma_s^k\right).$$

Hieraus ist klar ersichtlich, daß die Beziehungen für das Spannungssystem τ nicht dieselben sind wie für das System σ.

3. Die Gleichgewichtsbedingungen. Die Änderung der Dehnungsenergie, bezogen auf den Volumeninhalt V für den Fall der nichthomogenen Dehnung ist

$$\delta W=\iiint_V \sum^{\mu\nu}\tau_\nu^\mu\,\delta\varepsilon_\mu^\nu\,dV \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.1).$$

Die Größen ε_j^i müssen alle Glieder erster und zweiter Ordnung enthalten, so, wie sie vorher berechnet worden sind:

$$\varepsilon_\mu^\nu=\varepsilon_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum^{i}\left(\omega_\mu^i e_\nu^i+\omega_\nu^i e_\mu^i\right)+\frac{1}{2}\sum^{i}\omega_\mu^i\,\omega_\nu^i .$$

Da in unserem Falle nur cartesische Tensoren benutzt sind, können für jeden Tensor A_μ^ν auch die Bezeichnungen $A^{\nu\mu}$ oder $A_{\nu\mu}$ benutzt werden.

Durch Variation ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon_{\mu\nu}=\delta e_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\sum^{i}\left(\omega_\mu^i\,\delta e_\nu^i+\omega_\nu^i\,\delta e_\mu^i\right)+\frac{1}{2}\sum^{i}\left(e_\nu^i\,\delta\omega_\mu^i+e_\mu^i\,\delta\omega_\nu^i\right)&\\ +\frac{1}{2}\sum^{i}\left(\omega_\mu^i\,\delta\omega_\nu^i+\omega_\nu^i\,\delta\omega_\mu^i\right)&\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3.2).$$

Zudem kann unter Benutzung der Beziehungen (1.3) und durch richtigen Gebrauch der Summationszeichen gezeigt werden, daß

$$\sum^{\mu\nu}\tau^{\mu\nu}\,\delta\varepsilon_{\mu\nu}=\sum^{i\mu\nu}\left(\tau^{\nu i}\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}+\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\,\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}\right)$$

ist.

Wir benutzen die Eigenschaft, daß $\delta\frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}=\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta u^i$ und integrieren partiell. Dann erhalten wir aus dem Integral (3.1) die Beziehung

$$\delta W=\iint_S f^i\,\delta u_i\,dS-\iiint_V A^i\,\delta u_i\,dV \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.3),$$

wo

$$f^i=\sum^{\nu}\tau^{\nu i}\alpha_\nu+\sum^{\mu\nu}\left[\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\right]\alpha_\nu \quad \ldots \ldots \quad (3.4)$$

und worin α_ν die Richtungskosinusse der äußeren Normalen der Oberfläche von V sind.

$$A^i=\sum^{\nu}\frac{\partial\tau^{\nu i}}{\partial x^\nu}+\sum^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\right) \quad \ldots \ldots \quad (3.5).$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte ist gleich $-\delta W$ und die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich:

$$\delta W_e=\iint_S F^i\,\delta u^i\,dS+\iiint_V X^i\,\varrho\,\delta u^i\,dV \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3.6),$$

wobei F^i die Oberflächenkraft ist, bezogen auf die ursprüngliche Fläche, und X^i die Massenkraft darstellt. Wenn wir bedenken, daß die gesamte virtuelle Arbeit für alle Werte von δu^i verschwindet, so erhalten wir

$$\delta W_e-\delta W=0$$

und die Gleichgewichtsbedingungen nehmen die Form

$$\sum^{\nu}\frac{\partial\tau^{\nu i}}{\partial x^\nu}+\sum^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\tau^{\mu\nu}\omega_\mu^i+\frac{1}{2}\tau^{\mu\nu}e_\mu^i-\frac{1}{2}\tau^{\mu i}e_\mu^\nu\right)+X\varrho=0 \quad \ldots \ldots \quad (3.7)$$

an, und die Randbedingungen werden durch

$$F^i = \sum^{\nu} \tau^{\nu i} \alpha_\nu + \sum^{\mu\nu} \left(\tau^{\mu\nu} \omega^i_\mu + \frac{1}{2} \tau^{\mu\nu} e^i_\mu - \frac{1}{2} \tau^{\mu i} e^\nu_\mu \right) \alpha_\nu \quad \ldots \ldots \quad (3.8)$$

dargestellt.

Diese Gleichungen können auch durch die Spannungen $\sigma^{\mu\nu}$ dargestellt werden. Da wir uns auf Glieder erster und zweiter Ordnung beschränkt haben, können wir für ε^ν_μ die Größe e^ν_μ einsetzen.

$$\tau^{\nu i} = (1 + e)\sigma^{\nu i} - \frac{1}{2} \sum^{\mu} (e^\nu_\mu \sigma^{\mu i} + e^i_\mu \sigma^{\mu\nu}) \quad \ldots \ldots \quad (3.9).$$

Diese Ausdrücke werden in die Gl. (3.7) und (3.8) eingesetzt. Es genügt, wenn wir für unsere Näherung $\tau^{\nu i}$ nur in die Glieder erster Ordnung einsetzen und in den übrigen Gliedern an Stelle von $\tau^{\nu i}$ die Größen $\sigma^{\nu i}$ nehmen.

Auf diese Weise erhalten wir

$$\sum^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (1 + e)\sigma^{\nu i} - \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sigma^{\mu\nu} \omega^i_\mu - \sigma^{\mu i} e^\nu_\mu) + X^i \varrho = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3.10)$$

und die Randbedingungen

$$F^i = \sum^{\nu} (1 + e)\sigma^{\nu i} \alpha_\nu + \sum^{\mu\nu} (\sigma^{\mu\nu} \omega^i_\mu - \sigma^{\mu i} e^\nu_\mu) \alpha_\nu \quad \ldots \ldots \quad (3.11).$$

4. Die lineare Elastizitätstheorie eines vorbeanspruchten Körpers. Als Anfangszustand nehmen wir an, daß eine Vorbeanspruchung $S^{\mu\nu}$ im Körper existiert, der die Koordinaten x^i entsprechen. Die Gleichgewichtsbedingung dieses Anfangsspannungsfeldes lautet:

$$\sum^{\nu} \frac{\partial S^{\nu i}}{\partial x^\nu} + \varrho X^i = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4.1),$$

worin ϱX^i die anfängliche Einheitsmassenkraft bedeutet.

Nehmen wir jetzt an, daß der Körper einer kleinen Dehnung unterzogen wird. Für diese Dehnungen bauen wir eine lineare Elastizitätstheorie auf.

Die Koordinaten x^i eines materiellen Punktes im Körper werden durch die Dehnung zu $x^i + u^i$. Die Koordinatenänderungen u^i und der dazugehörige Tensor e^i_j, ω^i_j werden als Näherungen erster Ordnung angesehen. Die Dehnungskomponenten ε^i_j sind wie in Gl. (1.13) definiert. Für die Komponenten der Spannung nach der Dehnung können nun entweder die tatsächliche Spannung $\sigma^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$, oder die Spannung $\tau^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$, bezogen auf die Fläche vor der Dehnung gewählt werden. Die Spannungsänderungen $t^{\mu\nu}$ und $s^{\mu\nu}$ sind auch als klein und als Näherungen erster Ordnung anzusehen.

Die einer linearen Theorie entsprechende Dehnungsenergie muß nun lineare und quadratische Glieder enthalten. Wir behandeln somit die Änderung der Dehnungsenergie, δW, die einer Änderung der Dehnung von der Größenordnung $\delta \varepsilon_{\mu\nu}$ entspricht. Man erkennt, daß es möglich ist, einen Ausdruck für δW zu erhalten, der alle Glieder erster und zweiter Ordnung enthält, wenn man $\sigma^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + s^{\mu\nu}$ in die Gl. (2.10) einsetzt. Wenn man alle Glieder dritter Ordnung vernachlässigt, erhält man

$$\delta W = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} \delta \varepsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu} \delta \varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4.2),$$

worin

$$t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + \varepsilon S^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum^{\varkappa} (\varepsilon^\mu_\varkappa S^{\nu\varkappa} + \varepsilon^\nu_\varkappa S^{\mu\varkappa}) \quad \ldots \ldots \quad (4.3)$$

ist.

Die obigen Gleichungen drücken die Beziehungen zwischen den beiden Systemen der Spannungskomponenten $s^{\mu\nu}$ und $t^{\mu\nu}$ aus: Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen sind als linear angenommen. Die Form dieser Beziehungen hängt natürlich von der Wahl des Spannungssystemes ab, d. h. ob wir das System $s^{\mu\nu}$ oder $t^{\mu\nu}$ benutzen.

$$t^{\mu\nu} = \sum^{\varkappa r} C^{\mu\nu}_{\varkappa r} e_{\varkappa r} \quad \ldots \ldots \quad (4.4)$$

oder

$$s^{\mu\nu} = \sum^{\varkappa r} B^{\mu\nu}_{\varkappa r} \varepsilon_{\varkappa r} \quad \ldots \ldots \quad (4.5).$$

Die Summierung $\sum^{\varkappa r}$ wird über alle sechs Kombinationen von $\varkappa$ und r ausgedehnt. Damit $\delta W'$ ein totales Differential sein kann, müssen gewisse Beziehungen zwischen den Koeffizienten B und C bestehen. Es bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial t^{\mu\nu}}{\partial \varepsilon_{\varkappa r}} = \frac{\partial t^{\varkappa r}}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} \quad \ldots \ldots \quad (4.6),$$

somit

$$C^{\mu\nu}_{\varkappa r} = C^{\varkappa r}_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4.7),$$

$$\left.\begin{aligned} & B^{\mu\nu}_{\varkappa r} + S^{\mu\nu}\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{\varkappa r}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\varkappa r}}\sum^{\alpha}\left(S^{\alpha\mu}\varepsilon^{\nu}_{\alpha} + S^{\alpha\nu}\varepsilon^{\mu}_{\alpha}\right) \\ & = B^{\varkappa r}_{\mu\nu} + S^{\varkappa r}\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\sum^{\alpha}\left(S^{\alpha\varkappa}\varepsilon^{r}_{\alpha} + S^{\alpha r}\varepsilon^{\varkappa}_{\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4.8).$$

Die C-Koeffizienten stellen eine symmetrische Matrix dar, während dasselbe für die B-Koeffizienten im allgemeinen nicht zutrifft.

Der Ausdruck $\delta W' = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\delta\varepsilon_{\mu\nu}$ stellt das Differential einer quadratischen Form W' in der Veränderlichen $\varepsilon_{\mu\nu}$ dar. Wir haben $\frac{\partial W'}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}} = t^{\mu\nu}$ und von den Eigenschaften quadratischer Formen

$$2W' = \sum^{\mu\nu}\frac{\partial W'}{\partial \varepsilon_{\mu\nu}}\varepsilon_{\mu\nu} = \sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4.9).$$

So erhalten wir einen Ausdruck für die potentielle Energie

$$W = \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4.10),$$

der alle Glieder erster und zweiter Ordnung enthält.

Weiterhin kann an Stelle von $\varepsilon_{\mu\nu}$ auch $e_{\mu\nu}$ eingesetzt werden, zum mindesten in der ersten Gruppe der Glieder $\sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}$, denn W wird dadurch nur in der dritten Ordnung beeinflußt. Somit

$$W = \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} t^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (4.11),$$

wobei die Beziehung zwischen Spannung und Dehnung durch

$$t^{\mu\nu} = \sum^{kr} C^{\mu\nu}_{kr} e_{kr} \quad \ldots \ldots \quad (4.12)$$

gegeben ist.

Zugleich können auch die Spannungen $s^{\mu\nu}$ aus (4.3) eingeführt werden und man erhält

$$t^{\mu\nu} = s^{\mu\nu} + e\,S^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\sum^{k}\left(e^{\mu}_{k} S^{\nu k} + e^{\nu}_{k} S^{\mu k}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4.13).$$

Nach Einsetzen dieser Ausdrücke in W erhalten wir

$$W = \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} s^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + \sum^{\mu\nu} S^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^{\mu\nu} e_{\mu\nu}\left[S^{\mu\nu} e - \frac{1}{2}\sum^{k}\left(e^{\mu}_{k} S^{\nu k} + e^{\nu}_{k} S^{\mu k}\right)\right] \quad . \quad (4.14)$$

mit den Spannungs-Dehnungsbeziehungen

$$s^{\mu\nu} = \sum^{kr} B^{\mu\nu}_{kr} e_{kr} \quad \ldots \ldots \quad (4.15).$$

Es muß nun klar im Auge behalten werden, daß der Wert $\varepsilon_{\mu\nu}$, der hier benutzt wird, durch die Gl. (1.13) dargestellt ist:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sum^{i}\left(\omega^{i}_{\mu} e^{i}_{\nu} + \omega^{i}_{\nu} e^{i}_{\mu}\right) + \frac{1}{2}\sum^{i}\omega^{i}_{\mu}\,\omega^{i}_{\nu}.$$

Wenn wir nun diese Ausdrücke der Dehnungsenergie W benutzen und die Variationsmethode der virtuellen Arbeit anwenden, wie es im nichtlinearen Falle geschehen ist, sowie die Gleichgewichtsbedingung (4.1) des Vorspannungsfeldes $S^{\mu\nu}$ berücksichtigen, so erhalten wir die folgenden Gleichungen für das Gleichgewicht

$$\sum^{\nu} \frac{\partial t^{\nu i}}{\partial x^{\nu}} + \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(S^{\mu\nu} \omega^i_{\mu} + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} e^i_{\mu} - \frac{1}{2} S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu} \right) + \varrho \, \Delta X^i = 0 \quad . \quad . \quad (4.16),$$

worin ΔX^i die Änderung erster Ordnung der Massenkraft ist.

Wir erhalten für die Randbedingungen

$$\Delta F^i = \sum^{\nu} t^{\nu i} \alpha_{\nu} + \sum^{\mu\nu} \left[S^{\mu\nu} \omega^i_{\mu} + \frac{1}{2} S^{\mu\nu} e^i_{\mu} - \frac{1}{2} S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu} \right] \alpha_{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.17),$$

worin ΔF^i die Änderung der Oberflächenkraft, bezogen auf die Einheit der ursprünglichen Oberfläche, und α_{ν} der Kosinus der Richtungswinkel der nach außen gerichteten Normalen bedeuten.

Wir haben somit die Gleichungen für die Spannungsänderung $t^{\mu\nu}$, bezogen auf die ursprünglichen Flächen. Wir können auch die tatsächliche Spannungsänderung $s^{\mu\nu}$ einführen, entweder indem wir mit dem Ausdruck für W (4.14) beginnen, oder indem wir die Beziehungen (4.13) in die Gl. (4.16) und (4.17) einsetzen.

Wir erhalten so die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum^{\nu} \frac{\partial s^{\nu i}}{\partial x^{\nu}} + \sum^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (e S^{\nu i}) + \sum^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (S^{\mu\nu} \omega^i_{\mu} - S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu}) + \varrho \, \Delta X^i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.18)$$

und die Randbedingungen:

$$\Delta F^i = \sum^{\nu} s^{\nu i} \alpha_{\nu} + e \sum^{\nu} S^{\nu i} \alpha_{\nu} + \sum^{\mu\nu} (S^{\mu\nu} \omega^i_{\mu} - S^{\mu i} e^{\nu}_{\mu}) \alpha_{\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4.19).$$

Die Gl. (4.16), (4.17), (4.18), (4,19) enthalten alle Glieder erster Ordnung, die in einer Theorie der Elastizität eines Körpers unter Vorspannung enthalten sind.

Die Gl. (4.18) können auch in einer anderen Form geschrieben werden, wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen (4.1) berücksichtigen, die sich auf die Vorspannungen beziehen, sowie die Identitäten:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (e^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}) = \frac{\partial e^{\mu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad \text{oder} \quad \sum^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (e^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}) = \frac{\partial e}{\partial x^{\nu}},$$

worin $e = \sum^{\mu} e^{\mu}_{\mu}$.

Die Gl. (4.18) haben die Form

$$\left.\begin{aligned} & \sum^{\nu} \frac{\partial s^{\nu i}}{\partial x^{\nu}} + \varrho \, \Delta X^i - \varrho \sum^{\mu} \omega^i_{\mu} X^{\mu} + \sum^{\mu\nu} \left(S^{\nu i} \frac{\partial \omega^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + S^{\mu\nu} \frac{\partial \omega^i_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) \\ & \qquad - e \varrho X^i - \sum^{\mu\nu} e^{\nu}_{\mu} \frac{\partial S^{\mu i}}{\partial x^{\nu}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4.20).$$

Die Glieder in Gl. (4.20) lassen eine interessante Deutung zu. Nehmen wir zum Beispiel den Fall einer zwei-dimensionalen Dehnung und setzen

$$\begin{aligned} x^1 &= x & u^1 &= u & X^1 &= X \\ x^2 &= y & u^2 &= v & X^2 &= Y \end{aligned} \qquad e^{\nu}_{\mu} = \begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{vmatrix}, \qquad \omega^{\nu}_{\mu} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{vmatrix},$$

worin

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten die Gleichgewichtsbedingungen (4.18) die Form

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial s^{11}}{\partial x}+\frac{\partial s^{12}}{\partial y}+\varrho\, \Delta X+\varrho\, \omega Y\\
&\quad+(S^{11}-S^{22})\frac{\partial \omega}{\partial y}-2S^{12}\frac{\partial \omega}{\partial x}\\
&\quad-e\varrho X-e_{xx}\frac{\partial S^{11}}{\partial x}-e_{yy}\frac{\partial S^{12}}{\partial y}-e_{xy}\left(\frac{\partial S^{12}}{\partial x}+\frac{\partial S^{11}}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\}\quad . \;.\;.\;.\;. \quad (4.21)$$

und eine ähnliche Gleichung für die Y-Richtung.

Die zusätzlichen Glieder in der zweiten und dritten Reihe können als Folge der Formänderung eines infinitesimalen Elementes aufgefaßt werden. Die Glieder in der zweiten Reihe stellen den Einfluß der Krümmung dar. Die Glieder in der dritten Reihe haben ihren Ursprung in einer Art Auftrieb eines Elementes durch seine Formänderung im ursprünglichen Dehnungsfeld. Man erkennt somit, daß die Glieder, die die Krümmung darstellen, nur von ursprünglichen größten Querspannungen abhängen und für den Fall eines anfänglichen gleichmäßigen Druckes verschwinden. Die Glieder, die mit dem Auftrieb zu tun haben, verschwinden, wenn das ursprüngliche Spannungsfeld homogen ist. In diesem Falle, oder wenn wir den anfänglichen Spannungsgradienten und die Massenkraft vernachlässigen, erhalten wir die Gleichungen

$$\frac{\partial s^{11}}{\partial x}+\frac{\partial s^{12}}{\partial y}+(S^{11}-S^{22})\frac{\partial \omega}{\partial y}-2S^{12}\frac{\partial \omega}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial s^{12}}{\partial x}+\frac{\partial s^{22}}{\partial y}+(S^{11}-S^{22})\frac{\partial \omega}{\partial x}+2S^{12}\frac{\partial \omega}{\partial y}=0 \quad (4.22).$$

Diese letzte Art von Gleichungen muß eine große und fundamentale Rolle in Knickungsaufgaben spielen. Man erkennt, daß überhaupt die Möglichkeit einer Knickung im wesentlichen von der Existenz einer Querspannung im ursprünglichen Spannungsfeld abhängt. Diese Folgerungen sind auch im drei-dimensionalen Falle richtig.

5. Anwendungen. Die Dehnungskomponenten zweiter Ordnung in der Plattentheorie. Die Verschiebungen in Biegung und Dehnung werden angenommen wie folgt:

$$u=u_0(x,y)-z\frac{\partial w}{\partial x},\qquad v=v_0(x,y)-z\frac{\partial w}{\partial y},\qquad w=w(x,y).$$

Die Ebene $z=0$ wird als Mittelebene vor der Biegung angenommen. Durch Anwendung der Formel (1.13) erhält man die drei wichtigsten Komponenten des Dehnungstensors:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11}&=\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\\
\varepsilon_{22}&=\frac{\partial v_0}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\\
\varepsilon_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned}\right\}\quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (5.1).$$

Isotrope Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung mit quadratischen Gliedern.

Wegen der Isotropie fallen die Hauptachsen für Spannung und Dehnung zusammen. Wir wählen die rechtwinkligen Achsen 1, 2, 3, parallel mit den Hauptrichtungen und betrachten jetzt die Spannungskomponente τ_{11} als Funktion der Dehnungskomponenten ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, die Glieder erster und zweiter Ordnung enthalten. Ein Vertauschen der Achsen 2 und 3 hat wegen der Isotropie keinen Einfluß auf τ_{11}, deshalb

$$\tau_{11}=\lambda\varepsilon+G\varepsilon_{11}+A\varepsilon_{11}^2+B(\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{33}^2)+C\varepsilon_{11}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})+D\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir:

$$\tau_{22}=\lambda\varepsilon+G\varepsilon_{22}+A\varepsilon_{22}^2+B(\varepsilon_{33}^2+\varepsilon_{11}^2)+C\varepsilon_{22}(\varepsilon_{33}+\varepsilon_{11})+D\varepsilon_{33}\varepsilon_{11},$$
$$\tau_{33}=\lambda\varepsilon+G\varepsilon_{33}+A\varepsilon_{33}^2+B(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{22}^2)+C\varepsilon_{33}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})+D\varepsilon_{11}\varepsilon_{22},$$

worin $\varepsilon=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ die kubische Dilatation bedeutet. Unter der Annahme eines elastischen Potentiales müssen die Beziehungen (2.11) befriedigt sein.

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial \varepsilon_{22}}=\frac{\partial \tau_{22}}{\partial \varepsilon_{11}},\qquad \frac{\partial \tau_{22}}{\partial \varepsilon_{33}}=\frac{\partial \tau_{33}}{\partial \varepsilon_{22}},\qquad \frac{\partial \tau_{33}}{\partial \varepsilon_{11}}=\frac{\partial \tau_{11}}{\partial \varepsilon_{33}}.$$

Leitet man noch die Beziehung $2B=C$ ab, werden die Beziehungen zwischen Spannung und Dehnung durch fünf Elastizitätskonstante dargestellt. Das Bestehen von fünf physikalischen Konstanten war auch schon von F. D. Murnaghan festgestellt worden, der aber auf anderem Wege zu diesem Schluß gelangt ist (siehe oben). Die physikalische Bedeutung seiner Konstanten ist jedoch eine andere, als in unserem Falle.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen können in der äquivalenten Form dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda\varepsilon + G\varepsilon_{11} + L\varepsilon^2 + M\varepsilon_{11}^2 + N(2\varepsilon\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2), \\ \tau_{22} &= \lambda\varepsilon + G\varepsilon_{22} + L\varepsilon^2 + M\varepsilon_{22}^2 + N(2\varepsilon\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2), \\ \tau_{33} &= \lambda\varepsilon + G\varepsilon_{33} + L\varepsilon^2 + M\varepsilon_{33}^2 + N(2\varepsilon\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.2).$$

Im Falle, daß wir es nicht mit den Hauptrichtungen zu tun haben, erhalten wir in Cartesischen Koordinaten

$$\tau_{\mu\nu} = \Big(\lambda\varepsilon + L\varepsilon^2 + N\sum^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\Big)g_{\mu\nu} + (\mu + 2N\varepsilon)\,\varepsilon_{\mu\nu} + M\sum^{\alpha}\varepsilon_{\mu\alpha}\varepsilon_{\nu\alpha} \quad \ldots \quad (5.3),$$

worin $g_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$ und $g_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$. Diese fünf Elastizitätskonstanten λ, G, L, M, N könnten bequem zu einer genaueren Beschreibung sehr elastischer Stoffe benutzt werden.

Erhöhung der Drehungssteifigkeit eines prismatischen Stabes durch axiale Spannung.

Der prismatische Stab wird unter gleichmäßiger axialer Spannung $S_{33} = S$ angenommen; die z-Achse ist parallel mit der Stabachse. Als zusätzliche Spannungskomponenten der Drehung werden die $s_{\mu\nu}$ angenommen. Die Gleichgewichtsbedingungen sind (4.20)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial s_{11}}{\partial x} + \frac{\partial s_{12}}{\partial y} + \frac{\partial s_{13}}{\partial z} + S\frac{\partial \omega_y}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial s_{21}}{\partial x} + \frac{\partial s_{22}}{\partial y} + \frac{\partial s_{23}}{\partial z} - S\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial s_{31}}{\partial x} + \frac{\partial s_{32}}{\partial y} + \frac{\partial s_{33}}{\partial z} + S\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.4).$$

Die Randbedingungen (4.19) werden

$$\left.\begin{aligned} \Delta F_x &= s_{11}a_1 + s_{12}a_2 + s_{13}a_3 + S\omega_y a_3, \\ \Delta F_y &= s_{21}a_1 + s_{22}a_2 + s_{23}a_3 - S\omega_x a_3, \\ \Delta F_z &= s_{31}a_1 + s_{32}a_2 + s_{33}a_3 + S(e_{11} + e_{22})a_3 - Se_{13}a_1 - Se_{23}a_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5.5).$$

Als angenähertes Spannungs-Dehnungsgesetz wird das Hookesche Gesetz für ein isotropes Material angenommen:

$$\left.\begin{aligned} Ee_{11} = s_{11} - \nu(s_{22} + s_{33}), \quad Ee_{22} = s_{22} - \nu(s_{11} + s_{33}), \quad Ee_{33} = s_{33} - \nu(s_{22} + s_{11}) \\ 2Ge_{12} = s_{12}, \quad 2Ge_{23} = s_{23}, \quad 2Ge_{31} = s_{31} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5.6).$$

Es kann leicht gezeigt werden, daß die klassische Lösung der Torsionsaufgabe von Saint Venant, die sich auf einen Stab ohne Vorspannung bezieht, auch die obigen Gleichungen befriedigt. Wenn Θ den Drehungswinkel bezeichnet, dann bedeutet s_{32} und s_{31} die Verteilung der Querbeanspruchung über die Schnittfläche und ist durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \Theta x\right) = s_{32}, \quad G\left(-\Theta y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = s_{31}, \quad \frac{\partial s_{31}}{\partial x} + \frac{\partial s_{32}}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (5.7),$$

wobei die Randbedingungen aussagen, daß die Querspannung tangential zu der Schnittfläche sein muß. Wenn wir nun das an der Schnittfläche angreifende Drehmoment berechnen, erhalten wir nicht dasselbe Resultat, das die Saint Venantsche Theorie ergeben würde. Das hat seinen Grund in der Tatsache, daß die an der Schnittfläche angreifenden Kräfte, die durch die Randbedingungen (5.5) dargestellt sind, die Form haben:

$$\Delta F_x = s_{13} + S\omega_y, \qquad \Delta F_y = s_{23} - S\omega_x \quad \ldots \quad (5.8).$$

Die Werte von ω_x und ω_y werden aus der Saint Venantschen Lösung abgeleitet, und wir erhalten:

$$\omega_x = \frac{1}{2}\frac{s_{32}}{G} - x\Theta, \qquad \omega_y = -\frac{1}{2}\frac{s_{31}}{G} - y\Theta \quad \ldots \quad (5.9).$$

Das an der Schnittfläche angreifende Gesamtdrehmoment ist:

$$T = \left(1 - \frac{S}{2G}\right)\iint(-s_{13}y + s_{23}x)\,dx\,dy + S\Theta\iint(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

oder

$$T = \left(1 - \frac{S}{2G}\right) T_{SV} + I_G S \Theta \quad \ldots \ldots \quad (5.10).$$

In diesem Ausdruck bedeutet T_{SV} das aus der Saint Venantschen Theorie abgeleitete Drehmoment und I_G das polare Trägheitsmoment der Schnittfläche, bezogen auf den Schwerpunkt der Fläche.

Der Nullpunkt des Koordinatensystemes x, y muß hier mit dem Schwerpunkte zusammenfallen, damit das aus diesen Gleichungen erhaltene Kraftsystem ein reines Drehmoment ist. Das Glied $\frac{S}{2G}$ kann im Vergleich mit „Eins" vernachlässigt werden, weil es eine Näherung gleicher Ordnung ist, wie die Näherung durch die Einführung des Hookeschen Gesetzes für ein isotropes Material (5 6).

Deshalb ist der Wert des Drehmomentes

$$T = T_{SV} + I_G S \Theta \quad \ldots \ldots \quad (5.11).$$

Das Korrekturglied für die anfängliche axiale Vorspannung erhält nur dann Bedeutung, wenn die Drehsteifigkeit der Saint Venantschen Theorie klein ist im Vergleich zu $S I_G$. Bei-

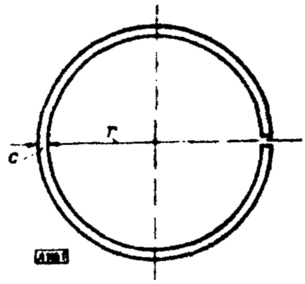

Bild 1.

spielsweise erhalten wir im Falle eines dünnwandigen Zylinders, der parallel seiner Achse aufgeschnitten ist,

$$T = \frac{2}{3} \pi r c^3 G \left[1 + 3\left(\frac{r}{c}\right)^2 \frac{S}{G}\right] \quad \ldots \ldots \quad (5.12),$$

wobei „r" den Radius und „c" die Wandstärke bedeuten. Wählen wir zum Beispiel $r/c = 10$ und $S/G = 1/1000$, so erhalten wir durch den Einfluß der axialen Spannung einen Fehler des Saint Venantschen Drehmomentes von 30%. 118