"The Oscillating Deformable Airfoil of Infinite Span in Compressible Flow " by M.A.Biot Columbia University New York N.Y.

The compressible flow around a thin airfoil of infinite span and constant chord is considered.The existence of sweepback is included. As a first step it is assumed that this airfoil oscillates in a mode of sinusoidal amplitude distribution along the span.It is shown that the problem thus becomes two-dimensional and reduces to the solution of an equation of the Pockels type .This solution leads to serbes of Mathieu functions which for a given wave length can be made to fit an arbitrary amplitude distribution along the chord. By means of a Fourier integral it is then possible to solve also for an arbitrary spanwis e amplitude distribution.Such solution can be used for instance to find the aerodynamic forces on ailerons extending along a small portion of the span or the effect of three dimensional flow on the oscillating airfoil with spanwise amplitude distribution.The theory is developed for the most general case

LE PROFIL OSCILLANT DEFORMABLE, D'ENVERGURE INFINIE DANS UN FLUIDE COMPRESSIBLE

Par M. A. Biot

Columbia University New York N.Y.

Introduction.

On étudie ici l'écoulement d'un fluide compressible autour d'un profil mince d'envergure infinie et de corde constante oscillant selon des formes de modes arbitraires. On suppose que les génératrices de la voilure et la direction de l'écoulement forment un angle pouvant être différent d'un droit. On calcule le potentiel d'accélération, d'après Prandtl (référence 1) et on montre que le problème peut être ramené à un problème à deux dimensions. Ce problème peut être traité par des méthodes semblables à celles utilisées précédemment par l'auteur pour l'écoulement incompressible (référence2). Une étape intermédiaire de la résolution consiste à supposer une distribution sinusoïdale d'amplitude le long de l'envergure. La solution obtenue dans ce cas pour un large domaine de longueurs d'ondes conduit à des types très généraux de répartition d'amplitude selon l'envergure et devrait être particulièrement utile pour la détermination des forces aérodynamiques résultant de l'oscillation d'un volet s'étendant sur une portion de l'envergure.

Equations générales.

Considérons un fluide compressible en écoulement uniforme de vitesse U selon la direction des x. On suppose qu'il s'y produit de petites perturbations de vitesse

$$\bar{u} = \text{grad}\ \phi_1 \qquad (1)$$

dérivant d'un potentiel de vitesses ϕ_1. Ce potentiel de vitesses satisfait à l'équation

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} - \frac{2M}{a}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} \qquad (2)$$

où a = vitesse du son
M = U/a est le nombre de Mach

L'accélération est

$$\bar{a} = \text{grad}\ \phi \qquad (3)$$

où ϕ est le potentiel d'accélération et

$$p = -\rho\,\phi \qquad (4)$$

l'accroissement de pression. Le potentiel d'accélération est lié au potentiel des vitesses par

$$\phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \tag{5}$$

Donc ϕ satisfait à la même équation (2) que ϕ_1, savoir

$$(1-M^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - 2\frac{M}{a}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

Nous allons traiter le problème d'une aile mince de corde constante et d'envergure infinie. On suppose que le bord d'attaque fait un angle α avec la direction normale à l'écoulement(angle de balayage). Ce problème sera traité en utilisant des coordonnées obliques. On prend un nouvel axe z_1 dans la direction de l'envergure, l'axe x selon la direction de l'écoulement et l'axe y normal au plan de l'aile (figure 1). Les nouvelles et les anciennes coordonnées sont liées par les relations

$$\begin{aligned} x &= x_1 + z_1 \sin\alpha \\ y &= y_1 \\ z &= z_1 \cos\alpha \end{aligned} \tag{7}$$

La transformée de l'équation (6) devient

$$(1-M_1^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y_1^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2\phi}{\partial z_1^2} - 2\frac{M_1}{a}\cos\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\,\partial t}$$
$$-2\sin\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1\,\partial z_1} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{8}$$

où $M_1 = M\cos\alpha$ est le nombre de Mach dans une direction normale au bord d'attaque. Supposons une oscillation harmonique de fréquence $\omega/2\pi$ et l'amplitude distribuée sinusoïdalement le long de l'envergure avec une longueur d'onde $2\pi/\lambda$. Le potentiel ϕ prendra la forme

$$\phi = \varphi(x_1, y_1)\, e^{i(\omega t + \lambda z_1)} \tag{9}$$

et la nouvelle fonction inconnue φ devra satisfaire à l'équation suivante, où pour simplifier les notations, on a remplacé x_1 et y_1 par x et y :

$$(1-M_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \cos^2\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - 2i\left(\frac{M_1\omega\cos\alpha}{a} + \lambda\sin\alpha\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$+\left(\frac{\omega^2\cos^2\alpha}{a} - \lambda^2\right)\varphi = 0 \tag{10}$$

Pour introduire des variables sans dimensions, nous supposons que le bord d'attaque se trouve en $x = -b$ et le bord de fuite en $x = b$, c'est-à-dire que la longueur de la corde dans la direction de l'écoulement est 2b. Prenons les variables sans dimensions

$$\xi_1 = x/b$$
$$\eta = y/b\cos\alpha$$

et posons $\Omega = \dfrac{\omega b \cos\alpha}{a}$; c'est une "fréquence réduite" liée

à la corde 2b cos α normale au bord d'attaque et à la vitesse du son a.
L'équation (10) devient

$$(1-M_1^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial \xi_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-2i(M_1\Omega+\lambda b\sin\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}+(\Omega^2-\lambda^2b^2)\varphi=0 \tag{11}$$

Le paramètre $1/\lambda b$ est sans dimensions et représente "l'allongement" de la longueur d'onde. Notons que cette équation est exactement du même type que dans le cas à deux dimensions ($\lambda=0$) avec le bord de fuite normal à l'écoulement. Pour illustrer la méthode de résolution de cette équation, nous devons distinguer entre les cas d'écoulements subsonique et supersonique.

Cas subsonique. $M_1 < 1$

Posons

$$\xi = \xi_1/\sqrt{1-M_1^2}$$
$$A = \Omega^2-\lambda^2b^2$$
$$B = \frac{M_1\Omega+\lambda b\sin\alpha}{\sqrt{1-M_1^2}}$$

L'équation (11) devient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}-2iB\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+A\varphi=0 \tag{12}$$

La dérivée première peut être éliminée par la subsitution

$$\varphi=\psi e^{iB\xi} \tag{13}$$

L'équation en ψ est

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+(A+B^2)\psi=0 \tag{14}$$

Le problème est ainsi ramené à la résolution d'une équation à deux dimensions bien connue. Notons que pour $A+B^2>0$, cette équation exprime la propagation d'une onde acoustique dans un milieu stationnaire. Les transformations conduisant à cette équation sont donc équivalentes à une transformation de Lorentz. Il y a une fréquence critique pour laquelle $A+B^2=0$; aux fréquences inférieures à cette valeur, il n'y a aucune radiation.

Puisque l'aile s'étend du bord d'attaque $\xi=-1$ au bord de fuite $\xi=+1$, il est indiqué d'utiliser des coordonnées elliptiques ayant ces points comme foyers. Ces coordonnées μ et θ sont définies par la transformation

$$\xi=\cosh\mu\cos\theta$$
$$\eta=\sinh\mu\sin\theta \tag{15}$$

Les variables sont séparées et la solution peut être exprimée au moyen d'une série de fonctions de Mathieu,

$$\psi=\sum^{k} C_k\, F_k(\mu)\, G_k(\theta) \tag{16}$$

Comme exemple, considérons le cas particulier d'une aile oscillant de telle façon que la corde accomplisse une translation d'amplitude h pour une section $z = 0$ de l'envergure. L'accélération est constante le long de la corde et son amplitude est

$$-\omega^2 h = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} e^{iB\xi}$$

ou

$$-\omega^2 hb \cos\alpha \, e^{-iB\xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \qquad (17)$$

On doit trouver une solution ψ de (14) satisfaisant à cette condition aux limites. La condition de Kutta exige que ψ soit fini au bord de fuite mais il peut y avoir une singularité au bord d'attaque. Par analogie avec la méthode exposée dans la référence 2, la solution peut être séparée en deux termes

$$\psi = C\psi_1 + \psi_2 \qquad (18)$$

où ψ_1 a une singularité dipôle au bord d'attaque seulement et satisfait à la condition $\partial\psi_1/\partial\eta = 0$ le long de la corde, tandis que ψ_2 n'a aucune singularité et satisfait à la condition limite (17). La constante C est déterminée par la condition que la vitesse normale au profil soit iωh (voir référence 2).

$$i\omega h = \left(e^{-\frac{i\omega x}{U}}/U\right) \int_{-\infty}^{-b+\varepsilon} e^{i\omega x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dx \qquad (19)$$

L'intégration doit être effectuée de $x = -\infty$ à travers la singularité jusqu'au point situé en $x = -b+\varepsilon$, juste avant le bord d'attaque (ε est arbitrairement petit).

Une méthode similaire permet de résoudre le problème d'une aile ayant un angle d'attaque nul et un volet oscillant. Dans ce cas, comme indiqué dans la référence 2, la fonction ψ doit avoir une singularité dipôle au bord d'attaque et à la ligne d'articulation du volet.

Ayant déterminé le potentiel d'accélération ϕ pour une distribution d'amplitude sinusoïdale le long de l'envergure et de paramètre λ, il est possible d'exprimer la solution pour une distribution d'amplitude arbitraire selon l'envergure, au moyen d'une intégrale de Fourier. Par exemple, désignons par $\varphi(x_1, y_1, \lambda)\beta e^{i\lambda z_1}$ le potentiel d'accélération correspondant à une distribution $\beta e^{i\lambda z_1}$ selon l'envergure de l'amplitude d'oscillation d'un volet. Pour un volet s'étendant de $z_1 = -\ell$ à $z = +\ell$, le long de l'envergure, (figure 2) et oscillant avec une amplitude uniforme β, le potentiel d'accélération est donné par

$$\phi(x_1, y_1, z_1) = \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, y_1, \lambda) e^{i\lambda z_1} \frac{\sin \lambda \ell}{\lambda} \, d\lambda \qquad (20)$$

Cas supersonique. $M_1 > 1$

Dans ce cas, nous posons

$$\xi = \xi_1 / \sqrt{M_1^2 - 1}$$
$$A = \Omega^2 - \lambda^2 b^2$$
$$B = \frac{M_1 \Omega + \lambda b \sin\alpha}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

En introduisant une fonction ψ définie comme précédemment par la relation (13), l'équation (14) est remplacée par

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + (A \cancel{+} B^2)\psi = 0 \qquad - \qquad (21)$$

Le problème est réduit à un problème à deux dimensions du type hyperbolique qui peut être traité par les méthodes connues.

Références:

1) Prandtl, L., Theorie des Flugzeugtragflugels im zusammen druckbaren Medium, Luffahrtforschung, Bd 13, Nr. 10; pages 313-319, Octobre 1936.

2) Biot, M.A., Some Simplified Methods in Airfoil Theory Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.9;N°5, pages 185-190, Mars 1942.

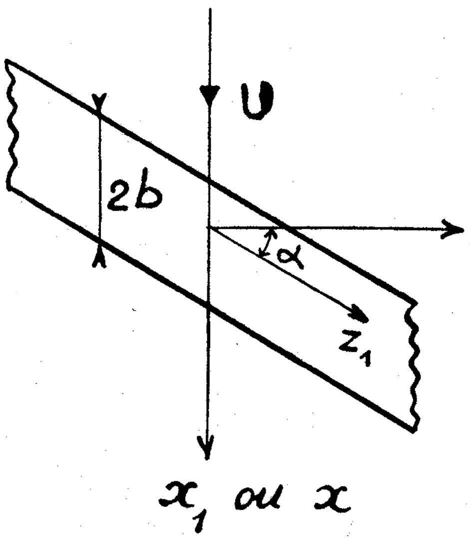

Fig:1

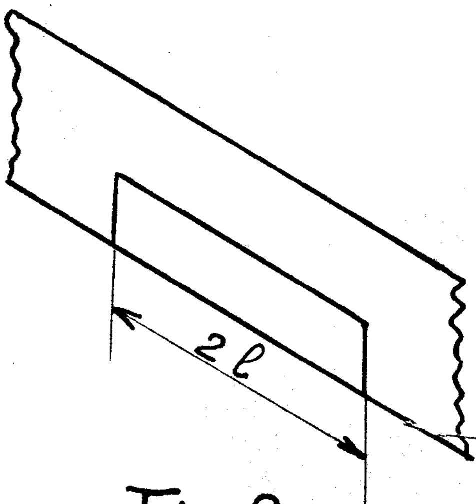

Fig: 2

traduit par W. Barrois