COLLOQUES INTERNATIONAUX
DU
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

N° 111

LA PROPAGATION DES ÉBRANLEMENTS DANS LES MILIEUX HÉTÉROGÈNES

MARSEILLE
11 - 16 Septembre 1961

EXTRAIT

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, QUAI ANATOLE-FRANCE — PARIS - VII
1962

THÉORIE GÉNÉRALISÉE DE LA PROPAGATION ACOUSTIQUE DANS UN SOLIDE POREUX DISSIPATIF

M. A. BIOT

Shell Development Company New York

I - EQUATIONS FONDAMENTALES.

La propagation acoustique dans un milieu poreux élastique saturé d'un fluide visqueux a été l'objet d'études théoriques, en particulier, par Frenkel [1], Zwikker et Kosten [2] et l'auteur [3]. Le milieu poreux est supposé élastique et statistiquement isotrope et la dimension des pores est suffisamment petite par rapport à la longueur d'onde de façon à rendre négligeable le phénomène de diffusion (scatter).

Nous sommes partis d'équations établies en 1941 dans la théorie statique de la Consolidation [4] en y ajoutant les termes dynamiques. Ces équations ont conduit à des résultats détaillés concernant les propriétés de la propagation acoustique dans le modèle considéré [3].

Il est possible d'introduire des généralisations importantes des théories précédentes de façon à inclure un grand nombre de phénomènes de relaxation qu'on peut classifier généralement sous le nom de viscoélasticité. Ces phénomènes mettent en jeu toutes espèces d'irréversibilités physico-chimiques, les propriétés de dissipation interne du réseau solide aussi bien que des propriétés mécaniques spéciales dans les régions de contact intergranulaires. La généralisation peut s'étendre également à la propagation dans les milieux anisotropes.

Dans les considérations qui suivent, nous n'avons pas inclus l'effet électrocinétique, dont l'étude a été remise à une date ultérieure.

Les relations tension-déformation d'un réseau élastique poreux statistiquement isotrope s'écrivent [4], [5]

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= 2\mu\, e_{ij} + \delta_{ij}\,(\lambda_c e - \alpha M \zeta) \\ p_f &= -\alpha M e + M \zeta \end{aligned} \qquad (1)$$

Les grandeurs physiques sont définies de la manière suivante. Nous appelons u_i les composantes du vecteur $\vec{u}$ qui représente le déplacement du solide et w_i les composantes du déplacement relatif $\vec{w}$ du fluide par rapport au solide, mesuré en volume par unité de surface du milieu poreux. Nous avons posé

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$e = \mathrm{div}\ \vec{u}$$

$$\zeta = -\ \mathrm{div}\ \vec{w} \qquad (2)$$

p_f = pression dans les pores

τ_{ij} = tension du milieu poreux

δ_{ij} = symbole de Kronecker.

Les autres grandeurs sont des coefficients d'élasticité.

Une des équations dynamiques s'obtient en exprimant la quantité de mouvement totale du fluide et du solide :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho\ \ddot{u}_i + \rho_f\ \ddot{w}_i \qquad (3)$$

Nous désignons par ρ la masse spécifique du milieu mixte et par ρ_f celle du fluide. Une autre équation résulte des lois du mouvement relatif du fluide par rapport au solide :

$$-\frac{\partial p_f}{\partial x_i} - \rho_f\ \ddot{u}_i = Y^*(p)\ \dot{w}_i \qquad (4)$$

Le membre de gauche contient le gradient de pression et l'accélération d'entraînement. Le symbole $Y^*(p)$ est une fonction de l'opérateur différentiel $p = d/dt$ ou de la fréquence complexe $p = i\omega$ qui gouverne le mouvement relatif du fluide. Cet opérateur dépend de l'inertie du fluide, de sa viscosité et de la géométrie des pores. Nous avons donné à $Y^*(p)$ le nom *d'opérateur viscodynamique*.

En combinant les trois systèmes d'équations (1), (3) et (4), on obtient par élimination

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{u} + \mathrm{grad}\ [(\mu + \lambda_c)\ e - \alpha M \zeta] &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho \vec{u} + \rho_f \vec{w}) \\ \mathrm{grad}\ [\alpha M e - M\zeta] &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_f \vec{u}) + Y^* \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \end{aligned} \qquad (5)$$

Ce sont les équations de propagation en milieu uniforme.

Il y a une onde transversale et deux ondes longitudinales dites de première et de seconde espèce. Dans l'onde de première espèce les déplacements absolus du fluide et du solide tendent à rester en phase tandis que dans l'onde de seconde espèce ils tendent à être de phases opposées. Cette dernière onde est donc très amortie. Une onde de première espèce engendre à la frontière trois ondes ; une de ces ondes est de seconde espèce et représente la partie principale de l'absorption des revêtements acoustiques.

Cette onde de seconde espèce joue aussi un rôle important dans la dissipation acoustique des milieux à porosité non uniforme. A basse fréquence elle dégénère en un phénomène de diffusion qui caractérise la consolidation.

II - EVALUATION DE L'OPERATEUR VISCODYNAMIQUE.

Cette évaluation peut se faire de plusieurs façons :

a) Méthode Lagrangienne.

L'équation (4) peut s'écrire sous forme Lagrangienne par l'introduction d'une fonction de dissipation :

$$D = \frac{\eta}{2k} (\dot{w}_x^2 + \dot{w}_y^2 + w_z^2) \tag{6}$$

et de l'énergie cinétique du fluide en mouvement relatif

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m (\dot{w}_x^2 + \dot{w}_y^2 + \dot{w}_z^2) \tag{7}$$

Dans ces équations, η est le coefficient de viscosité du fluide et k le coefficient de perméabilité de Darcy. Les quantités D et $\mathcal{T}$ s'évaluent en supposant que le champ des microvitesses est le même qu'en régime de Poiseuille. L'opérateur viscodynamique devient :

$$Y^*(p) = \frac{\eta}{k} + mp \tag{8}$$

En introduisant une fréquence caractéristique

$$\omega_c = \frac{\eta}{k \rho_f} \tag{9}$$

on obtient

$$Y^*(p) = \rho_f \omega_c \left(1 + \frac{m}{\rho_f} \frac{p}{\omega_c} \right) \tag{10}$$

On peut appliquer cette méthode au cas où les pores sont constitués de tubes capillaires de section circulaire ou aplatie [3]. Dans ce cas, on peut établir une expression exacte pour $Y^*(p)$. En comparant avec l'expression approchée (10), on constate que celle-ci est valable dans la région des basses fréquences, pour $\omega/\omega_c < 1$, c'est-à-dire jusqu'aux fréquences où les forces de viscosité et d'inertie sont du même ordre. Pour des pores saturés d'eau et de dimension de l'ordre du dixième de millimètre, ceci correspond à une fréquence d'environ 300 c. p. s.

b) Facteurs de Correction.

On peut écrire l'opérateur viscodynamique sous la forme :

$$Y^*(p) = \frac{\eta}{k} F^* \left(\frac{p}{\omega_c}\right) + \rho_f p \tag{11}$$

en introduisant une fonction complexe F^* qui dépend de la fréquence et dont l'évaluation a été faite dans un travail antérieur [3]. Cette fonction est égale à l'unité à la fréquence zéro. A haute fréquence, F^* tend vers un vecteur déphasé de 45 degrés et proportionnel à $\sqrt{\omega}$. Ceci correspond à l'existence d'une couche limite d'épaisseur décroissante. Les micro-vitesses tendent vers un champ à potentiel et l'on pourrait tenir compte de ce fait en appliquant une légère correction à la grandeur ρ_f.

c) Modèle Expérimental.

L'application de la loi de similitude indique que l'opérateur viscodynamique peut s'écrire :

$$Y^*(p) = \rho_f \omega_c \; f^* \left(\frac{p}{\omega_c}\right) \tag{12}$$

La fréquence caractéristique ω_c contient la perméabilité proportionnelle au carré des dimensions des pores. Un empilement de sphères de 1 cm de diamètre saturé d'huile de viscosité cent fois celle de l'eau aurait une fréquence caractéristique d'environ 3 c. p. s. Cette fréquence appliquée au modèle à l'aide d'un dispositif à piston correspond à une fréquence de 300 c. p. s. lorsque la dimension des sphères est réduite à 1/10 mm avec des pores saturés d'eau.

III - MILIEUX ANISOTROPES.

Les relations tension-déformation du milieu poreux anisotrope avec réseau élastique contiennent 28 coefficients d'élasticité à matrice symétrique [6]. Elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= A_{ij}^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + M_{ij} \zeta \\ p_f &= M_{ij} e_{ij} + M \zeta \end{aligned} \tag{13}$$

Les équations (3) restent inchangées et les équations (4) deviennent :

$$- \frac{\partial p_f}{\partial x_i} - \rho_f \ddot{u}_i = Y^*_{ij} (p) \dot{w}_j \tag{14}$$

L'opérateur viscodynamique Y^*_{ij} est un tenseur symétrique du second ordre. Aux basses fréquences, on peut utiliser l'approximation Lagrangienne, d'où :

$$Y^*_{ij} (p) = \eta \, r_{ij} + m_{ij} \, p \tag{15}$$

On a défini les coefficients r_{ij} et m_{ij} par la fonction de dissipation et l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \eta \, r_{ij} \, \dot{w}_i \, \dot{w}_j \\ \mathcal{T} &= \frac{1}{2} m_{ij} \, \dot{w}_i \, \dot{w}_j \end{aligned} \tag{16}$$

En cas de symétrie orthorhombique, choisissons des axes de coordonnées selon les directions de symétrie. Ces directions sont alors des directions principales du tenseur viscodynamique. On peut écrire :

$$Y^*_{ij} = \begin{bmatrix} Y^*_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Y^*_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Y^*_{zz} \end{bmatrix} \tag{17}$$

avec

$$Y_{xx} = \rho_f \omega_x \, f^*_x \left(\frac{p}{\omega_x}\right) \qquad \text{etc.} \tag{18}$$

Il y a trois fréquences caractéristiques ω_x, ω_y, ω_z, correspondant à chacune des directions principales. Notons que pour la symétrie cubique correspondant à un empilement de sphères, le tenseur Y_{ij} est isotrope.

En substituant les valeurs (13) de τ_{ij} et p_f dans les équations (3) et (14), on obtient les six équations de propagation du milieu anisotrope général.

IV - VISCOELASTICITE ET DISSIPATION DANS LE SOLIDE.

Il est possible de tenir compte d'une vaste catégorie de phénomènes dissipatifs par l'application d'un principe de correspondance. La forme générale de ce principe est fondée sur la thermodynamique des processus irréversibles et les relations d'Onsager. Ce point de vue a été développé dans une série de publications (1954-1955) et appliqué aux milieux poreux [6]. La méthode conduit immédiatement à des équations de propagation généralisées. Dans les équations (5), on remplace les coefficients d'élasticité par des opérateurs

$$\mu^* \nabla^2 \vec{u} + \operatorname{grad} \left[(\vec{\mu}^* + \lambda_c^*)\, e - C^* \zeta \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \vec{u} + \rho_f \vec{w})$$

$$\operatorname{grad} \left[C^* e - M^* \zeta \right] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_f \vec{u}) + Y^* \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \tag{19}$$

Dans ces équations, le coefficient élastique αM a été remplacé par l'opérateur C^*. Ces opérateurs ont une forme particulière. Par exemple, l'opérateur de cisaillement s'écrit :

$$\mu^* = \int_0^\infty \frac{p}{p+r}\, \mu(r)\, dr + \mu + p\mu' \tag{20}$$

Les coefficients et les fonctions spectrales telles que $\mu(r)$ possèdent certaines propriétés spéciales déduites de la thermodynamique [6]. La forme (20) de l'opérateur suppose négligeables les forces d'inertie des degrés de liberté "interne". Lorsque ceux-ci entrent en jeu, le principe de correspondance reste valable, mais la forme des opérateurs est modifiée par des termes dynamiques. Tel est, par exemple, le cas d'un fluide renfermant des bulles d'air qui peuvent entrer en résonance à certaines fréquences. On en tiendra compte en remplaçant le module de rigidité à la compression par une fonction complexe de la fréquence contenant un facteur de résonance. Les opérateurs du type ci-dessus sont de nature extrêmement générale et sont capables de représenter les effets de relaxation thermoélastiques, physico-chimiques, la friction interne du solide, etc. A titre d'exemple, considérons un opérateur de cisaillement

$$\mu^* = ap^s + \mu \tag{21}$$

Physiquement, cet opérateur représente deux éléments en parallèle. Un des éléments est purement élastique de module μ. L'autre est un élément de fluage, de nature telle que sa déformation sous tension constante, en fonction du temps t, est proportionnelle à t^s. Lorsque s est fractionnaire, on reconnaît un type de fluage fréquemment observé.

En mouvement vibratoire à la fréquence angulaire ω, si l'on suppose $s \ll 1$, l'opérateur prend la forme approximative

$$\mu^* = a\omega^s \left(1 + \frac{i\pi s}{2}\right) + \mu \tag{22}$$

La partie imaginaire est proportionnelle au décrément logarithmique et varie très lentement avec la fréquence. Un décrément constant correspond à un coefficient d'absorption acoustique proportionnel à la fréquence. Ce résultat est conforme à une caractéristique très générale de la dissipation dans les solides [7].

Un autre opérateur jouissant de propriétés semblables a été suggéré dans une publication antérieure [8]. On l'obtient en substituant la fonction spectrale

$$\mu(r) = \begin{cases} \mu_1/r & r > \varepsilon \\ 0 & r < \varepsilon \end{cases} \tag{23}$$

Posons $\mu' = 0$, $p = i\omega$ dans l'expression (20). L'évaluation de l'intégrale donne

$$\mu^* = \mu_1 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega} \right) i + \mu_1 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}} + \mu \tag{24}$$

Lorsque ε est suffisamment petit, la partie imaginaire est pratiquement indépendante de la fréquence.

On peut aussi imaginer un mécanisme de dissipation intergranulaire. Dans un matériau granulaire, on peut considérer les surfaces de contact comme jouissant de propriétés non cristallines et visqueuses. En outre, au voisinage des surfaces de contact, la géométrie des pores ressemble à des fissures étroites où le fluide est emprisonné. Une déformation d'un tel milieu produit un mouvement de va-et-vient du fluide dans les fissures et donne lieu à un amortissement. On peut représenter ce modèle par l'opérateur.

$$\mu^* = \frac{1}{\dfrac{1}{\mu_0} + \dfrac{r}{\mu_1 (p + r)}} \tag{25}$$

Le module μ_0 représente la rigidité des grains et μ_1 est un module qui correspond à la rigidité locale des surfaces de contact. Dans le cas de grains sphériques, celle-ci peut se calculer par la théorie de Hertz. On peut ainsi représenter des propriétés plus complexes en remplaçant les coefficients μ_0 et μ_1 par des opérateurs de fluage du type (21).

Les considérations que nous avons illustrées en prenant comme exemple l'opérateur de cisaillement μ^* s'appliquent également aux autres opérateurs dans les équations (19).

Les équations de propagation dans le cas tout à fait général du milieu viscoélastique anisotrope s'obtiennent de façon similaire en remplaçant les coefficients d'élasticité dans les équations (13) par des opérateurs du même type que ceux que nous venons d'analyser.

REFERENCES

[1] J. FRENKEL - J. Phys. (U.R.S.S.) 8, 230 (1944).

[2] C. ZWIKKER, C.W. KOSTEN - Sound Absorbing Materials, Elsevier (1949).

[3] M.A. BIOT - J. Acout. Soc. Am. 28, 168-178 et 28, 178-191 (1956).

[4] M.A. BIOT - J. Appl. Phys. 12, 155-164 (1941).

[5] M.A. BIOT - J. Appl. Mech. 23, 91-96 (1956).

[6] M.A. BIOT - J. Appl. Phys. 27, 459-467 (1956).

[7] L. PESELNICK et W.F. OUTERBRIDGE - J. Geoph. Res. 66, 581-588 (1961).

[8] M.A. BIOT - Linear Thermodynamics and the Mechanics of Solids Proc. Third U.S.Na. Cong. Appl. Mech., A.S.M.E. (1958).

DISCUSSION

M. CANAC : Quand des billes sont au contact et que l'ensemble vibre, les mouvements hydrodynamiques ne sont pas les seuls à entrer en jeu : il intervient aussi des phénomènes d'adhérence, et les forces qui leur correspondent modifient de façon très importante le mouvement (cf. entre autres les travaux de Benedicks).

M. BIOT : Je crois que ces forces d'adhérence peuvent être représentées par les opérateurs de la théorie généralisée.

M. OLSZAK : Je félicite M. Biot de sa très belle étude. Je voudrais rappeler qu'une étude des phénomènes qui se produisent dans un mélange sol-eau a été faite, en 1925, par K. von Terzaghi, qui les a analysés en se basant sur des considérations thermodynamiques. Cette étude ne concernait que le cas statique, les termes d'inertie n'ayant pas été introduits ; de plus, elle avait été faite pour les systèmes uni-dimensionnels. Il serait intéressant de confronter les résultats de von Terzaghi avec les relations physiques de base de M. Biot.

M. BIOT : Les équations tensions-déformations statiques à une dimension coïncident formellement avec celles de Terzaghi. Dans le cas de trois dimensions les théories diffèrent fondamentalement.

M. COULOMB : L'anisotropie que vous faites intervenir est-elle seulement élastique ou bien y a-t-il aussi anisotropie géométrique des pores ?.

M. BIOT : La symétrie que j'ai supposée au milieu poreux est statistique, et résulte aussi bien de l'arrangement géométrique que des propriétés élastiques des grains.

M. VERNOTTE : L'intervention de pressions négatives dans le fluide qui mouille le corps poreux n'est-elle pas source de complications (apparition de seuils, blocage... ?).

M. BIOT : Dans la propagation acoustique les amplitudes sont très petites et font intervenir des fluctuations autour d'une pression moyenne positive. La propagation à grande amplitude exige un examen plus approfondi.

M. DAWANCE : Quelles conclusions peut-on tirer des formules proposées par l'auteur, quant aux différentes vitesses de propagation que l'on peut mesurer sur des échantillons de roches imprégnées de liquide ?.

M. BIOT : Le calcul des vitesses de phase et de groupe dans le cas d'une matrice élastique indique la possibilité d'une forte dispersion avec la fréquence. Cette dispersion sera accentuée si l'on tient compte des propriétés visco-élastiques du milieu.

Il y a une onde transversale et deux ondes longitudinales dites de première et de seconde espèce. Dans l'onde de première espèce les déplacements absolus du fluide et du solide tendent à rester en phase tandis que dans l'onde de seconde espèce ils tendent à être de phases opposées. Cette dernière onde est donc très amortie. Une onde de première espèce engendre à la frontière trois ondes ; une de ces ondes est de seconde espèce et représente la partie principale de l'absorption des revêtements acoustiques.

Cette onde de seconde espèce joue aussi un rôle important dans la dissipation acoustique des milieux à porosité non uniforme. A basse fréquence elle dégénère en un phénomène de diffusion qui caractérise la consolidation.